SISTEMI NON LINEARI

Nei sistemi lineari si poteva usare il modello di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

oppure la funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

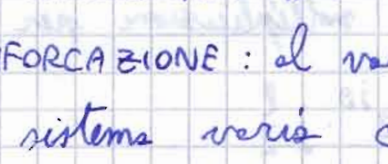
Nei sistemi non lineari la funzione di trasferimento non vale più perché non vale più la sovrapposizione degli effetti. Continua a valere il modello di stato, anche se non sarà più fatto da equazioni lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Nei sistemi affini al controllo lo studio del sistema è più semplice, ad esempio $\dot{x} = f(x) + g(x)u$.

I sistemi non lineari permettono anche di studiare il fenomeno della BIFORCAZIONE: al variare di pochi parametri il comportamento del sistema varia completamente.

Ad esempio lo stallo negli aerei:



$\alpha \to$ angolo di attacco

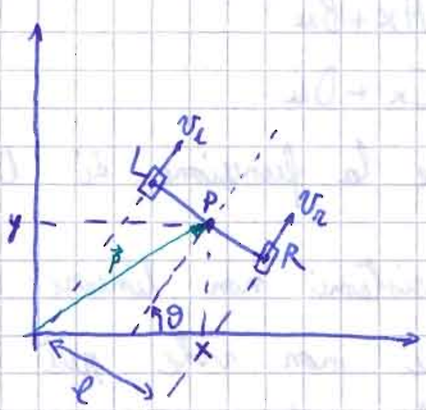
movimento laminare dell'aria

All'incrementarsi di α, aumenta la forza con il quale l'ala sorregge l'aereo. A un certo punto, però, il movimento dell'aria non è più laminare ma diventa turbolento (biforcazione) e viene a mancare la spinta che sorregge l'aereo. Negli aerei c'è un software che in tempo reale calcola l'angolo α limite.

Modello cinematico di robot mobile su ruote

Assunzioni:

1. corpo rigido del robot mobile
2. rotolamento senza strisciamenti delle ruote



I parametri che interessano sono:

- la distanza delle ruote ℓ
- l'asse di simmetria del robot
- il punto medio dell'asse P
- l'angolo che l'asse forma con l'asse x θ
- la posizione di P nello spazio x, y

Lo stato diventa:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{x}} = f(\bar{x}, u) \qquad u = \begin{bmatrix} v_R \\ v_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L = P + \overline{LP} \\ R = P + \overline{RP} \end{cases}$$ passando ai numeri complessi $P = x + jy$

Ricordo che una rotazione nei numeri complessi è la moltiplicazione per $e^{j\beta}$.

$$\begin{cases} L = P + e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \left(\frac{\ell}{2} + j0\right) \\ R = P + e^{j(\theta - \frac{\pi}{2})} \left(\frac{\ell}{2} + j0\right) \end{cases}$$

ruoto P di θ per allinearlo alla v_L e poi di $\frac{\pi}{2}$.

lunghezza (modulo) di $\overline{LP}$.

$$\begin{cases} L = P + e^{j\theta} \cdot j \frac{\ell}{2} \\ R = P + e^{j\theta} \cdot (-j) \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = P + (\cos\theta + j\sin\theta)\, j \frac{\ell}{2} \\ R = P + (\cos\theta + j\sin\theta)(-j) \frac{\ell}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} L = P + (-\sin\theta + j\cos\theta) \frac{\ell}{2} \\ R = P + (\sin\theta - j\cos\theta) \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

θ dipende dal tempo, quindi derivo ambi i membri per ottenere le velocità:

$$\begin{cases} \dot{L} = \dot{P} + \left(-\dot{\theta}\cos\theta + j\dot{\theta}(-\sin\theta)\right) \frac{\ell}{2} \\ \dot{R} = \dot{P} + \left(\dot{\theta}\cos\theta - j\dot{\theta}(-\sin\theta)\right) \frac{\ell}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{L} = \dot{P} - \dot{\theta}(\cos\theta + j\sin\theta) \frac{\ell}{2} \\ \dot{R} = \dot{P} + \dot{\theta}(\cos\theta + j\sin\theta) \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{L} = \dot{P} - \dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} \\ \dot{R} = \dot{P} + \dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} \end{cases}$$

velocità delle ruote in funzione della velocità del punto P, della velocità angolare $\dot{\vartheta}$ e della rotazione $e^{j\vartheta}$.

Se non c'è strisciamento, $\dot{R}$ è parallela all'asse di simmetria del robot.

$\dot{R} = \underbrace{v_r}_{\text{velocità scalare delle ruote}} \cdot \underbrace{e^{j\vartheta}}_{\text{rotazione}}$ non ho strisciamento & $\dot{L} = v_l \cdot e^{j\vartheta}$

$v_r = \underbrace{\omega_r}_{\text{velocità angolare}} \cdot \underbrace{R}_{\text{raggio delle ruote}}$ non ho strisciamento & $v_l = \omega_l \cdot R$

Riporto le condizioni nel sistema:

$$\begin{cases} v_l\, e^{j\vartheta} = \dot{P} - \dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} \\ v_r\, e^{j\vartheta} = \dot{P} + \dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} \end{cases}$$

Sommo ambo i membri:

$2\dot{P} = (v_r + v_l)\,e^{j\vartheta}$ cioè $\dot{x} + j\dot{y} = \underbrace{\boxed{\frac{v_r + v_l}{2}}}_{\triangleq v \text{ velocità del punto P}} e^{j\vartheta} = v(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$

Ricavo quindi:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\vartheta \\ \dot{y} = v\sin\vartheta \end{cases}$$

Per dedurre $\dot{\vartheta}$, faccio la differenza di ambo i membri e ottengo:

$\dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} + \dot{\vartheta}\,\frac{l}{2}\,e^{j\vartheta} = v_r\,e^{j\vartheta} - v_l\,e^{j\vartheta} \rightarrow \dot{\vartheta}\,l\,e^{j\vartheta} = (v_r - v_l)\,e^{j\vartheta}$ moltiplico per $e^{-j\vartheta}$

$\dot{\vartheta} = \dfrac{v_r - v_l}{l} \triangleq \omega$ velocità angolare del corpo rigido ($\perp$ al foglio)

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = v\cos\vartheta \\ \dot{y} = v\sin\vartheta \\ \dot{\vartheta} = \omega \end{cases}}$$

MODELLO DI STATO
NON LINEARE
AFFINE AL CONTROLLO

$$\dot{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}}_{u} \qquad \underline{f(x) = 0}$$

DRISCOLL: Learning Matlab ed. SIAM 2009

www.siam.org → e-books program

SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

Il sistemi del secondo ordine, lineari e non, possono essere rappresentati graficamente con il PIANO DELLE FASI o piano degli stati.

Le frecce rappresentano la direzione del campo vettoriale (velocità) in quel punto del piano delle fasi. Sono dei versori.

Nei sistemi lineari è possibile trovare soluzioni in forma chiusa e classificare i sistemi in base agli AUTOVALORI:

1) autovalori reali, distinti e non nulli: se ho due autovalori distinti, questi mi generano due autospazi (rette) distinte. Infatti, supponiamo per assurdo che $\mathrm{im}\, v_1 = \mathrm{im}\, v_2$; allora $\exists\, \alpha \neq 0$ tale che $v_2 = \alpha v_1$.

$A v_2 = \lambda_2 v_2$, $A \alpha v_1 = \lambda_2 \alpha v_1 \to \alpha \underbrace{A v_1}_{\lambda_1 v_1} = \alpha \lambda_2 v_1$, $\alpha \lambda_1 v_1 = \alpha \lambda_2 v_1$ otteniamo

$\underbrace{\alpha}_{\neq 0} (\lambda_1 - \lambda_2) \underbrace{v_1}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Si giunge ad un assurdo!

Le traiettorie per la stabilità, convergono tutte nell'origine e sono "schiacciate" nell'origine a causa della diversità degli autovalori: autovalori più negativi fanno aumentare la velocità di convergenza a 0.

Nel piano x, le traiettorie sono tangenti agli autovettori $\mathrm{im}\, v_1$ e $\mathrm{im}\, v_2$.

Nel caso di NODI INSTABILI, cioè $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, i versori escono dall'origine e le traiettorie divergono all'infinito (nella realtà, a fine corsa).

Se i due autovalori hanno segno diverso, il punto di equilibrio nell'origine è detto SELLA. Le traiettorie divergono verso la direzione dell'autovalore positivo (instabile).

2) autovalori reali coincidenti non nulli: la forma di Jordan può essere

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \text{ se } m(s)=(s-\lambda) \quad \text{oppure} \quad J=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \text{ se } m(s)=(s-\lambda)^2.$$

Nel primo caso, essendo $J=T^{-1}AT$ cioè $TJ=AT$, si ha che $T\lambda I=AT \rightarrow \lambda T=AT$ e moltiplicando per T^{-1} a destra $\lambda TT^{-1}=ATT^{-1}$ cioè $\lambda I=A$. La matrice A coincide con J.

Se $\lambda<0$ si ha un NODO STABILE, se $\lambda>0$ si ha un NODO INSTABILE.

Nel secondo caso non si riesce a disaccoppiare le equazioni in z. Le traiettorie non saranno più rettilinee nel piano delle fasi.

3) autovalori complessi coniugati: la forma di Jordan è $J_r=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$.

$$\dot z=T^{-1}ATz=Jz=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix};\ \begin{cases}\dot z_1=\alpha z_1-\beta z_2\\ \dot z_2=\beta z_1+\alpha z_2\end{cases}.$$

Queste equazioni sono difficili da interpretare e elaborare: meglio le coordinate polari!

$r=\sqrt{z_1^2+z_2^2}$ e $\vartheta=\arg(z_1+jz_2)$ essendo $z=re^{j\vartheta}$

$$\dot r=\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)^{-\frac{1}{2}}(2z_1\dot z_1+2z_2\dot z_2)=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}z_1(\alpha z_1-\cancel{\beta z_2})+\cancel{2}z_2(\cancel{\beta z_1}+\alpha z_2)}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}=\frac{\alpha z_1^2+\alpha z_2^2}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}=$$

$$=\frac{\alpha(z_1^2+z_2^2)}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}=\alpha(z_1^2+z_2^2)^{1/2}=\alpha\cdot r.$$

$$\vartheta=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_1} & \text{se } z_1>0\\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(z_2) & \text{se } z_1=0 \leftarrow \text{ignoro (caso di continuità)}\\ \operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_1}+\pi & \text{se } z_1<0 \leftarrow \text{quando derivo il "}+\pi\text{" scompare}\end{cases}$$

$$\dot\vartheta=D\left[\operatorname{arctg}\frac{z_2}{z_1}\right]=\frac{\frac{\dot z_2 z_1-\dot z_1 z_2}{z_1^2}}{1+\frac{z_2^2}{z_1^2}}=\frac{(\beta z_1+\cancel{\alpha z_2})z_1-(\cancel{\alpha z_1}-\beta z_2)z_2}{z_1^2+z_2^2}=\frac{\beta z_1^2+\beta z_2^2}{z_1^2+z_2^2}=\beta.$$

$$\begin{cases}\dot r=\alpha r\\ \dot\vartheta=\beta\end{cases}$$ equazioni semplici e disaccoppiate

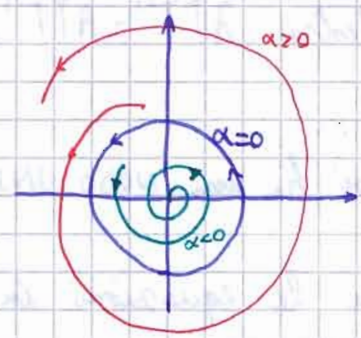
$$\begin{cases} r(t)=r(0)\,e^{\alpha t} \\ \theta(t)=\vartheta(0)+\beta t \end{cases}$$

se $\alpha=0$, le traiettorie sono delle circonferenze CENTRO

se $\alpha>0$, abbiamo la divergenza della traiettoria FUOCO INSTABILE

se $\alpha<0$, " " convergenza. FUOCO STABILE

La relazione $\vartheta(t)=\vartheta(0)+\beta t$ dice che le traiettorie hanno velocità costante.



4) uno o due autovalori nulli: si hanno due casi

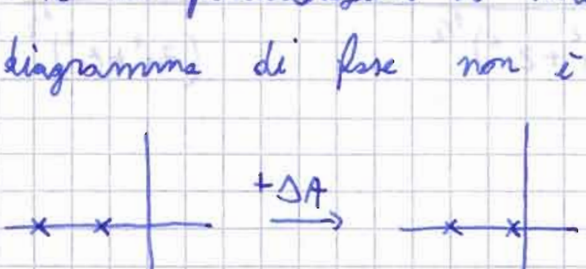
a. $\sigma(A)=\{0,\lambda\}$: l'autovettore associato a 0 è una retta di punti di equilibrio (trovati imponendo $\dot{x}=Ax=0$). Il rango della matrice A è uguale a 1.

b. $\sigma(A)=\{0,0\}$ ma $A\neq 0$: la matrice di Jordan sarà $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\dot{z}=Jz \quad \begin{cases} \dot{z}_1=z_2 \\ \dot{z}_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1=z_{01}+z_{02}t \\ z_2=z_{02} \end{cases}$

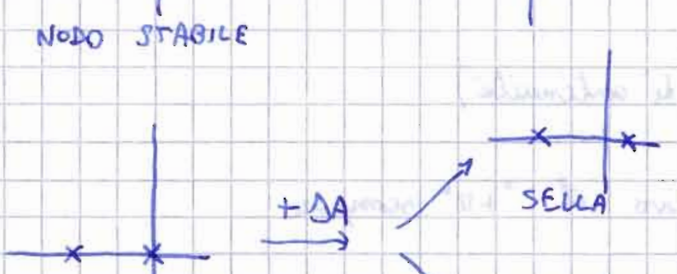
In caso di perturbazioni al sistema $(\tilde{A}=A+\Delta A)$, gli autovalori cambiano ma il diagramma di fase non è detto che vari:

a.



il diagramma NON cambia

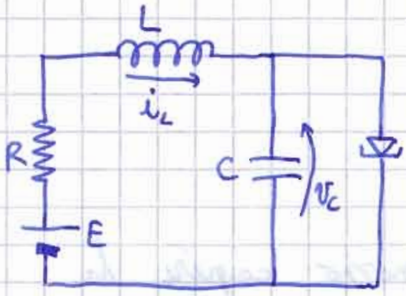
b



il diagramma cambia!

Tutto questo vale per sistemi lineari del secondo ordine. Quando passiamo a sistemi non lineari, i diagrammi delle fasi rimangono simili:

LEZIONE 3



Per ricavare il modello di stato del circuito, scrivo le equazioni alle maglie

$$\begin{cases} E = Ri_L + V_L + V_C \\ i_L = i_C + h(V_C) \end{cases} \qquad V_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad \frac{d}{dt}V_C = \frac{i_C}{C}$$

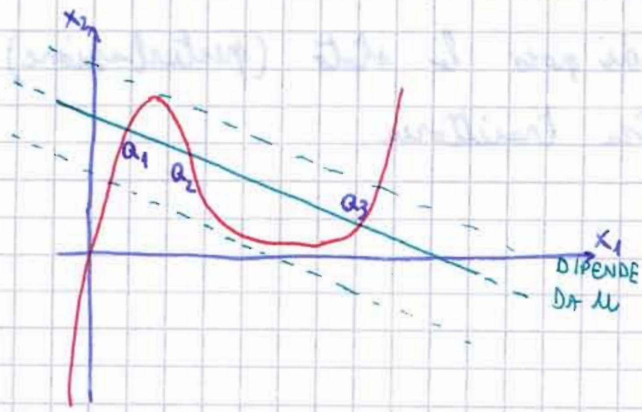
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left(x_2 - h(x_1)\right) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L}\left(u - Rx_2 - x_1\right) \end{cases}$$

NON LINEARE

Devo trovare i PUNTI DI EQUILIBRIO. Impongo $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$ (velocità)

$$\begin{cases} x_2 = h(x_1) & (1) \\ x_2 = -\frac{1}{R}x_1 + \frac{u}{R} & (2) \end{cases}$$

i punti di equilibrio sono le intersezioni tra le due rette.



Q_1 e Q_3 sono nodi stabili

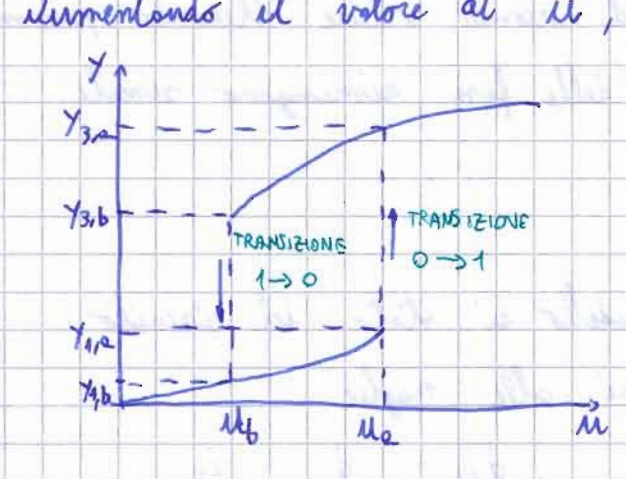
Q_2 è nodo instabile.

CARATTERISTICA STATICA → insieme delle possibili coppie u (ingresso) e y (uscita) di punti di equilibrio.

Nei sistemi lineari, la caratteristica statica è una retta passante per l'origine: $\Sigma \triangleq \{(u_c, y_c) \in \mathbb{R}^2 : u(t) = u_c \,;\, y(t) = y_c \,,\, \forall t \geq 0\}$.

Nei sistemi non lineari, la caratteristica statica ha fenomeni di ISTERESI cioè la "funzione" ha due possibili valori.

Aumentando il valore di u, arrivo al punto in cui ho la transizione



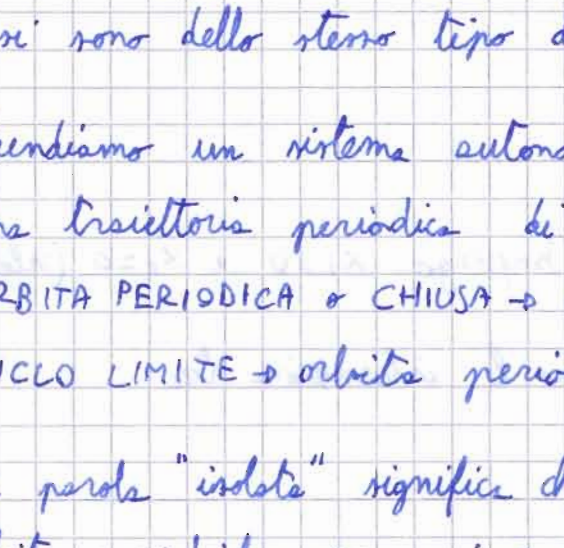
Se non ci sono autovalori sull'asse immaginario, posso capire la stabilità del sistema non lineare linearizzandolo: i diagrammi delle fasi sono dello stesso tipo del sistema lineare.

Prendiamo un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ (senza ingressi). Potrei avere una traiettoria periodica di periodo T data da $x(t) = x(t+T)$ $\forall t \geq 0$.

ORBITA PERIODICA o CHIUSA → immagine di una traiettoria periodica

CICLO LIMITE → orbita periodica <u>isolata</u>.

La parola "isolata" significa che nelle immediate vicinanze non ci sono altre orbite periodiche, per cui variando di poco lo stato (perturbazione) del sistema non finisco in un'altra traiettoria.



CICLO LIMITE
- STABILE: tutte le traiettorie che partono vicine al ciclo limite convergono ad esso per $t \to +\infty$
- INSTABILE: tutte le traiettorie che partono vicine al ciclo limite divergono da esso per $t \to +\infty$
- SEMISTABILE: le traiettorie che partono vicine e interne al ciclo limite convergono, le altre divergono o viceversa

TEOREMA DI POINCARÉ-BENDIXON

Se una traiettoria $x(t)$ di un sistema autonomo del secondo ordine rimane confinata in una regione Ω chiusa e limitata $[x(t) \in \Omega \; \forall t \geq 0]$ allora vale una delle affermazioni:

a. $x(t)$ converge ad un punto di equilibrio

b. $x(t)$ converge ad un'orbita periodica

c. $x([0,+\infty[)$ è un'orbita periodica.

Non vale per sistemi del terzo ordine (fenomeni di caos).

LEZIONE 4

Gli autovalori di una matrice reale simmetrica sono tutti reali.

Una matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta ORTOGONALE o ORTONORMALE se $Q^T Q = I$ o $Q^T = Q^{-1}$.

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica è diagonalizzabile con una trasformazione ortogonale, composta dagli n autovettori. Ovvero:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^T A Q, \quad Q = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = AQ \qquad A[v_1, v_2, \dots, v_n] = [v_1, v_2, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$[A\lambda_1, A\lambda_2, \dots, A\lambda_n] = [\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n] \Rightarrow A v_i = \lambda_i v_i.$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una funzione $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ espressa come $q(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$ è detta FORMA QUADRATICA.

$q_1(x) = x_1 x_2 + 3x_2 x_4 + 7x_3^2 + 9x_1^2$ è una forma quadratica

$q_2(x) = x_1 x_2 + 3x_2 x_4 + 11 x_2$ non è una forma quadratica.

La forma quadratica può sempre essere rappresentata con una matrice A simmetrica.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica. La forma quadratica $x^T A x$ o la matrice A è:

1. DEFINITA POSITIVA se e solo se $\lambda_i > 0$, $i=1 \dots n$
2. SEMIDEFINITA POSITIVA se e solo se $\lambda_i \geq 0$, $i=1,\dots,n$
3. DEFINITA NEGATIVA se e solo se $\lambda_i < 0$, $i=1,\dots,n$
4. SEMIDEFINITA NEGATIVA se e solo se $\lambda_i \leq 0$, $i=1,\dots,n$
5. INDEFINITA se e solo se $\exists$ autovalori positivi e negativi.

Una matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definita negativa se e solo se i determinanti dei minori principali dominanti sono alternativamente negativi e positivi:

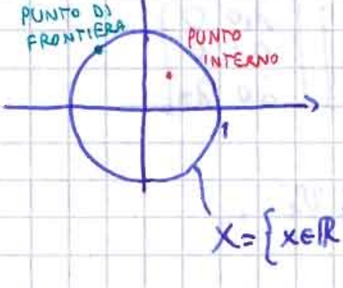
$A<0 \iff -A>0 \qquad x^T A x < 0 \ \forall x \neq 0 \iff x^T(-A)x > 0 \ \forall x \neq 0$

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$ applico il criterio di Sylvester.

$-A>0 \iff -a_{11}>0$ cioè $a_{11}<0$

$$\det\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} > 0 \iff (-1)\det\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)(-1)}_{+1}\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \iff \det A >$$

...



$X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$

LEZIONE 5

La soluzione dell'equazione di stato è

$\dot{x}(t) = f(\tau, x(\tau)) \quad \tau \in [t_0, t_1]$ integrando ottengo

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

$$\Big[x(\tau)\Big]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \text{ cioè } x(t) = T(x)$$

Esempio:

$$x_1(t) = x_0 \quad t \in [t_0, t_1] \Rightarrow x_{i+1}(t) = T(x_i(t)) \;, i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \lim_{i \to \infty} x_i(t) = x(t)$$

LEZIONE 6

La teoria di Lyapunov risale al 1892 e sono tuttora utilizzati:
Sia $f: D \to \mathbb{R}^n$ una funzione localmente lipschitziana e $x_{eq} \in D$ un punto di equilibrio tale che $f(x_{eq}) = 0$. Supponiamo che $x_{eq} = 0$.

Il punto di equilibrio è

- STABILE se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$
- INSTABILE se non è stabile
- ASINTOTICAMENTE STABILE se è stabile e δ può essere scelto tale che $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$.

Esempio: pendolo

La massa dell'asta è trascurabile.

$$\underbrace{ml^2 \ddot{\theta}}_{\text{inerzia}} = \underbrace{-(\overset{\text{componente tangente}}{mg \sin\theta})\, l}_{\text{coppia esercitata dalla forza peso}} \underbrace{-(\overset{\text{coefficiente di attrito viscoso}}{k}\, l \dot{\theta})\, l}_{\text{coppia dell'attrito viscoso}}$$

Il "−" è dovuto al fatto che le coppie si oppone al movimento di θ. Divido per l.

$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - Kl\dot{\theta}$ trasformo in equazione di stato: pongo $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\underbrace{\sin x_1}_{\text{non lineare}} - \dfrac{K}{m}x_2 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono 2:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \sin x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$ ma prendo $n=1$ perché dal punto di vista fisico esiste solo quello.

Ipotizzo $K=0$.

- $(0,0)$ è stabile ma non asintoticamente (lo sarebbe se $K>0$ e non ci fosse quindi moto perpetuo)
- $(\pi, 0)$ è instabile

L'energia del pendolo nello stato x sarà:

$$E(x) = \underbrace{mgl\overbrace{(1-\cos\theta)}^{\text{di quanto si è alzato il pendolo}}}_{\text{energia potenziale}} + \underbrace{\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2}_{\text{energia cinetica}} = mgl(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}ml^2x_2^2.$$

Quando $K=0$ ho moto perpetuo e, pertanto, $E(x)$ è costante perché il sistema è CONSERVATIVO. $\dfrac{dE(x(t))}{dt} = 0 \Rightarrow$ l'origine è STABILE.

Quando $K>0$ il sistema è DISSIPATIVO: $E(x)$ decresce e, pertanto, $\dfrac{dE(x(t))}{dt} \leq 0$ e l'origine è ASINTOTICAMENTE STABILE.

Lyapunov introdusse una funzione senza significato fisico che consentisse di studiare la stabilità di un punto di equilibrio.

Sia $V: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (scalare) e $x \to V(x)$ differenziabile.
Sia D un dominio con $0 \in D$ e $x(t)$ una generica soluzione.
$V(x(t))$ è una funzione scalare che dipende dal tempo. La sua derivata è

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x(t)}}_{\substack{\text{vettore}\\\text{riga}}} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\substack{\text{vettore}\\\text{colonna}}} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x(t)} \cdot f(x(t))$$

chain rule

La derivata di $V(x)$ lungo le traiettorie è $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$. È una funzione statica (non dipende dal tempo).

Teorema di Lyapunov (metodo diretto)

Sia $V: D \to \mathbb{R}$ differenziabile con $V(0)=0$, $V(x)>0$ su $D \setminus \{0\}$. (definita positiva)

1. Se $\dot{V}(x) \leq 0$ su D, allora $x=0$ è STABILE
2. Se $\dot{V}(x) < 0$ su $D \setminus \{0\}$, allora $x=0$ è ASINTOTICAMENTE STABILE

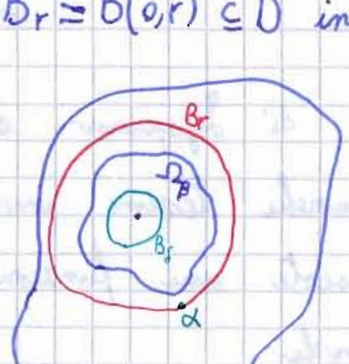
Fornisce condizioni sufficienti di stabilità statiche.

1. derivata di $V(x)$ semidefinita negativa $\Rightarrow x=0$ stabile
2. derivata di $V(x)$ definita negativa $\Rightarrow x=0$ asintoticamente stabile.

Dimostrazione

① $\forall \varepsilon > 0$ sia $r \in (0, \varepsilon)$ un raggio tale che la sfera $B_r = B(0,r) \subseteq D$ interamente contenuta nel dominio.

Scelgo $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ e $\beta \in (0, \alpha)$



$\Omega_\beta = \{x \in B_r : V(x) \leq \beta\} \Rightarrow \Omega \subset B_r$

Se $x(0) \in \Omega_\beta$ allora $\frac{dV(x(t))}{dt} = \dot{V}(x(t)) \leq 0 \ \forall t \geq 0$.
Allora $V(x(t))$ è decrescente.

$V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \ \forall t \geq 0$. Se $V(x)$ è continua $\exists \delta > 0$ tale che $B_\delta \subseteq \Omega_\beta$

Quindi se $x(0) \in B_\delta$ $(\|x(0)\| < \delta) \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \ \forall t \geq 0$, $x(t) \in B_r \ \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \|x(t)\| < r < \varepsilon \ \forall t \geq 0$ ($x=0$ è stabile).

② Se $\dot V(x) < 0$ per $x \neq 0$ e $x \in D$ segue $x(0) \in B_\delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$.

Devo dimostrare che $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ cioè $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$.

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \dot V(x(t)) < 0 \ \forall t \geq 0$$ cioè $V(x(t))$ è decrescente.

Allora $\exists\, c \geq 0$ tale che $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = c$. Sia, per assurdo, che $c > 0$. Allora $V(x(t)) > c \ \forall t \geq 0$.

$\Omega_c = \{x \in B_r : V(x) \leq c\} \Rightarrow \exists d > 0$ tale che $B_d \subseteq \Omega_c$.

Esiste pertanto γ tale che $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot V(x)$ $(\gamma > 0)$. Segue che $d \leq \|x(t)\| \leq r \ \forall t \geq 0$

$$\frac{dV(x(v))}{dv} = \dot V(x(v)) \ \forall v \geq 0$$ integrando $$\int_0^t \frac{dV(x(v))}{dv}\, dv = \int_0^t \dot V(x(v))\, dv$$

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot V(x(v))\, dv \leq \int_0^t (-\gamma)\, dv = -\gamma t \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Per t grande, $V(x(t))$ diventa negativo. Assurdo! ∎

FUNZIONE DI LYAPUNOV → funzione V differenziabile nel dominio contenente l'origine con $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ su $D \setminus \{0\}$ e $\dot V(x) \leq 0$ su D.

Il teorema di Lyapunov da solo una condizione sufficiente!
Esistono anche teoremi inversi che però dicono che se un punto è stabile esiste una funzione di Lyapunov che lo mostra, ma non dicono come trovarla.

Nei sistemi scalari, il punto $x=0$ è stabile se per $x<0$ la velocità è positiva e per $x>0$ la velocità è negativa:

COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI DI LYAPUNOV - METODO DEL GRADIENTE VARIABILE

Considero $V(x)$ una funzione scalare e $g(x)$ il suo gradiente tale che $g(x) = \nabla V = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T$.

$\dot V(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$. Scelgo $g(x)$ affinché $\dot V(x)$ sia definita negativa e $V(x)$ sia definita positiva.

LEMMA: $g(x)$ è il gradiente di una funzione scalare se e solo se la matrice Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ è simmetrica, cioè $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}$ $\forall i,j = 1,\dots,n$.

Per trovare $V(x)$ posso quindi integrare il gradiente lungo gli assi coordinati. Costruisco l'integrale muovendomi lungo gli assi coordinati.

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0)\, dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(\overset{\text{COSTANTE}}{x_1}, y_2, 0, \dots, 0)\, dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n)\, dy_n.$$

L'obiettivo è imporre o ricondurre la funzione $V(x)$ a una forma quadratica, più semplice da studiare.

LEZIONE 7

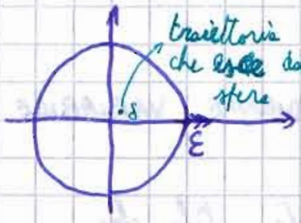
Un punto di equilibrio del sistema autonomo $\dot x = f(x)$ è GLOBALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE se la sua regione di attrazione è $\mathbb{R}^n$.

Se un punto di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile, allora è l'unico punto di equilibrio, altrimenti si avrebbe un punto che non converge al punto globalmente asintoticamente stabile.

STABILITÀ: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \le \varepsilon \quad \forall t \ge 0$

Essendo l'instabilità la negazione della stabilità si ha:

INSTABILITÀ: $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ (piccolo) se $\|x_0\| < \delta$ allora $\exists \bar{t} > 0$ tale che $\|x(\bar{t})\| \ge \varepsilon$

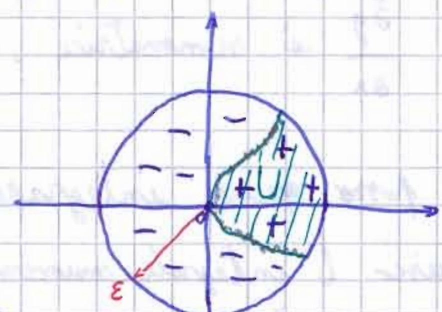


Il teorema di Chetaev dice proprio questo:

esistono una funzione $V: D \to \mathbb{R}$, con D dominio, differenziabile, uno scalare $\varepsilon > 0$ (quello di prima) tale che $B_\varepsilon \subseteq D$ e un sottoinsieme aperto $U \subseteq \{x \in D : V(x) > 0\} \cap B_\varepsilon$ tali che:

1. $x = 0$ è punto di frontiera di U [$\forall B$ posso trovare punti di U che vi appartengono
2. $V(x) = 0 \quad \forall x \in \partial U \cap B_\varepsilon$
3. $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in U$

Allora $x = 0$ è instabile.



Essendo $\dot{V}(x) > 0 \ \forall x \in U$, la traiettoria continua a crescere fino a uscire da B_ε e U.

Nei sistemi lineari, se $x = 0$ è asintoticamente stabile allora è anche globalmente asintoticamente stabile.

Se utilizzassi il metodo diretto di Lyapunov, potrei scegliere la forma quadratica:

$V(x) = x^T P x$ con $P > 0$. Calcolo $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \underbrace{Ax}_{f(x) = P} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = \dots = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$

con $Q = -(PA + A^T P)$ $[Q = Q^T]$

Oppure, potrei cercare una soluzione dell'EQUAZIONE DI LYAPUNOV $P > 0$

$$PA + A^T P = -Q \qquad \text{con } Q \text{ simmetrica e } Q > 0$$

Se la trovo, l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

Usando le formule di calcolo matriciale:

$$\frac{\partial (x^T P x)}{\partial x} = x^T (P + P^T)$$ ma essendo $P = P^T$ perché simmetrica

$$\dot{V} = 2x^T P A x = x^T (2PA) x$$ che posso simmetrizzare:

$$2PA = \frac{1}{2}\left(2PA + 2(PA)^T\right) = \frac{1}{2}\left(2PA + 2A^T \underset{P}{\underset{\shortparallel}{P^T}}\right) = PA + A^T P \quad \blacksquare$$

Lemma

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, i suoi autovalori sono tutti a parte reale negativa se e solo se per ogni matrice data definita positiva e simmetrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, esiste un'unica matrice simmetrica definita positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfacente l'equazione di Lyapunov:

$$PA + A^T P = -Q$$

Teorema di Lyapunov - metodo indiretto

Sia l'origine $x = 0$ un punto di equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ dove $f : D \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile sul dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ con $0 \in D$. Si definisca $A : \frac{\partial f}{\partial x}(0)$. Allora:

1) l'origine è ASINTOTICAMENTE STABILE se tutti gli autovalori di A hanno la parte reale negativa
2) l'origine è INSTABILE se almeno un autovalore di A ha la parte reale positiva.

Il teorema non è però esaustivo. Ad esempio, se gli autovalori sono come in figura, non so dire nulla sulla stabilità.

CASO CRITICO.

ESERCITAZIONE 1 - STABILITÀ

Per studiare la stabilità dell'origine ho quattro modi:
- metodo diretto di Lyapunov
- metodo indiretto di Lyapunov
- metodo BK
- metodo di Chetaev.

Ⓐ
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$$

Il sistema è facilmente linearizzabile essendo polinomiale

$$\Sigma_{lin}: \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Calcolo $\det(sI - A) \rightarrow \det \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = s(s+1) + 1 = s^2 + s + 1$

Ho due permanenze, quindi due autovalori a parte reale negativa.
L'origine è ASINTOTICAMENTE STABILE.

Se calcolo il $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$, vedo che gli autovalori sono complessi coniugati e pertanto l'origine è un FUOCO STABILE.

Ⓑ
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2^2 \end{cases} \qquad \Sigma_{lin}: \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ⇒ è asintoticamente stabile

Ⓓ
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_2^3 \end{cases} \qquad \Sigma_{lin}: \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$\det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s+2 & -1 \\ -1 & 1 & s+2 \end{bmatrix} = (s+1)\left[(s+2)^2 + 1\right] - (s+2) = (s+1)(s+2)^2 + (s+1) - (s+2) =$$
$$= s^3 + 5s^2 + 8s + 3$$

Applico il criterio di Routh:

3	1	8	0
2	5	3	0
1	$5\cdot 8-1\cdot 3 = 37$	0	0
0	3		

Ho 3 permanenze $\Rightarrow$ stabilità

In Matlab: roots([1 5 8 3])

(E) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -a x_1 - b x_2 \end{cases}$ $\quad \Sigma$ lin: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} x$

$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ a & s+b \end{bmatrix} = s(s+b)+a = s^2+bs+a$ se $a,b>0$, ho la stabilità.

L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Infatti:

- il sistema linearizzato (senza parte non lineare) è asintoticamente stabile
- il sistema composto dalle sole parte non lineare $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ è stabile per il solito ragionamento $\longrightarrow \underset{0}{\cdot} \longleftarrow$ $\quad x_1<0,\ \dot{x}_1>0$ e $x_1>0,\ \dot{x}_1<0$

Da un punto di vista pratico, il fatto che riesca a costruire il campo velocità come somma di due campi stabili è un indizio di stabilità. Lo provo con BK.

Scelgo la funzione $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$. Calcolo $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1^3+x_2) + x_2(-a x_1 - b x_2) = -x_1^4 + x_1x_2 - a x_1 x_2 - b x_2^2 =$$

$$= -x_1^4 + \underbrace{(1-a)x_1x_2}_{\text{questo termine potrebbe essere compensato da } -bx_2^2 \text{ che è negativo}} - b x_2^2$$

Per essere sicuro, riscrivo la forma quadratica in forma matriciale e uso il criterio di Sylvester

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{0} & \frac{1-a}{2} \\ \frac{1-a}{2} & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

↳ 1° elemento <0 NO

↳ determinante >0

La funzione scelta non va bene

Modifico la funzione scelta per fare in modo che, in $\dot{V}(x)$, si eliminino i termini misti:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2a}x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \cdot \frac{1}{a} = x_1(-x_1^3 + x_2) + \frac{1}{a}x_2(-ax_1 - bx_2) = -x_1^4 + \cancel{x_1x_2} - \cancel{x_1x_2} - \frac{b}{a}x_2^2$$

$= -x_1^4 - \frac{b}{a}x_2^2$ definita negativa $\forall x_1, x_2$ (con $a, b > 0$)

$\Rightarrow$ l'origine è globalmente asintoticamente stabile.

(F)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + \alpha x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 + x_2^3 \end{cases} \qquad \Sigma_{lin}: \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} x$$

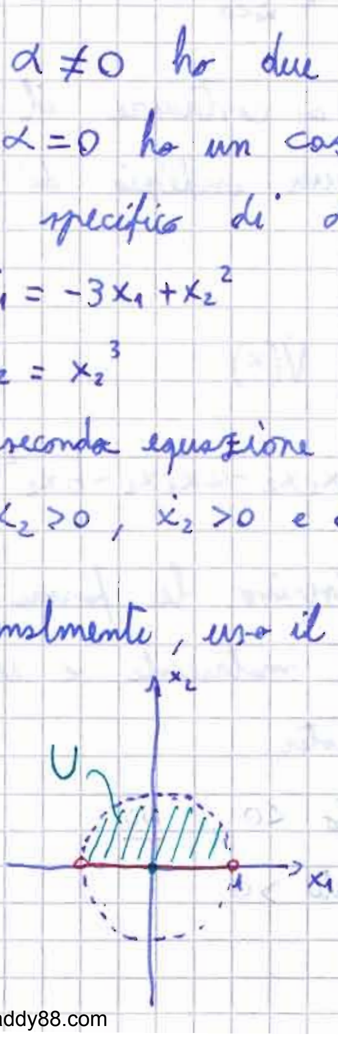
$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s+3 & -\alpha \\ \alpha & s \end{bmatrix} = s(s+3) + \alpha^2 = s^2 + 3s + \alpha^2$$

Se $\alpha \neq 0$ ho due permanenze e, quindi, 0 è asintoticamente stabile.
Se $\alpha = 0$ ho un caso critico: autovalori $= \{0, -3\}$. Analizzo il caso specifico di $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2^3 \end{cases}$$

La seconda equazione è disaccoppiata dalla prima ed è instabile perchè se $x_2 > 0$, $\dot{x}_2 > 0$ e diverge (idem se $x_2 < 0$ e $\dot{x}_2 < 0$)

Formalmente, uso il metodo di Chetaev. Scelgo $V(x) = x_2$ e $\varepsilon = 1$.



$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cap B_1$

1. $0 \in \partial U$ OK
2. $V(x) = 0$ per $x \in \partial U \cap B_1$ OK perchè $x_2 = 0$
3. $\dot{V}(x) = \dot{x}_2 = x_2^3 > 0 \quad \forall x \in U$ OK

INSTABILE!

Ⓖ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - \cos x_1 + (1+x_2)^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 \end{cases}$ punto di equilibrio $(0,-1)$

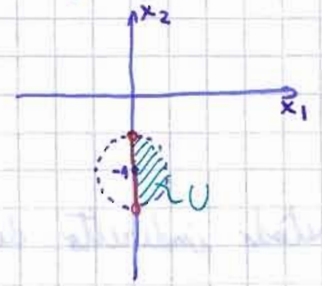
Calcolo lo Jacobiano $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \sin x_1 & 2(1+x_2) \\ 1-3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ gli autovalori sono $\{0,0\}$ CASO CRITICO!

Quando x_1 è molto piccolo, nella seconda equazione domina x_1 ed è instabile ($x_1>0 \Rightarrow \dot{x}_1>0$). Devo dimostrarlo.

Utilizzo Chetaev modificato per adattarlo a un punto non nell'origine.

Scelgo $V(x) = x_1$ e $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (valore piccolo).



$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\| < \frac{1}{2}\}$

sfera centrata in $(0,-1)$

1. $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} \in \partial U$ OK

2. $V(x) = 0$, $x \in \partial U \cap B_{\frac{1}{2}}$ OK perché $x_1 = 0$

3. $\dot{V}(x) = \dot{x}_1 = \underbrace{1-\cos x_1}_{\substack{>0 \\ \forall x \in U}} + \underbrace{(1+x_2)^2}_{\geq 0} > 0$ per $0<x_1<\frac{1}{2}$ $\forall x \in U$ OK

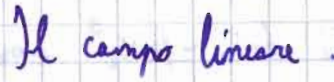
$\Rightarrow (0,-1)$ è instabile.

Ⓗ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{-x_1 - x_2}_{\text{campo lineare}} \underbrace{-\operatorname{sign}(x_2)}_{\text{campo non lineare}} \end{cases}$

Il campo lineare è dato dalla matrice $\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ con autovalori $-1 \pm j$ (fuoco stabile).

Il campo non lineare interviene solo sulla componente di x_2.

$-\operatorname{sign}(x_2) = \begin{cases} +1 & \text{se } x_2 < 0 \\ 0 & \text{se } x_2 = 0 \\ -1 & \text{se } x_2 > 0 \end{cases}$



È stabilizzante.

Non è detto che la somma dei due campi sia stabile!

Uso il metodo di Lyapunov. Scelgo $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$ e calcolo

$$\dot V(x)= x_1\dot x_1 + x_2\dot x_2 = x_1(-x_1+x_2) + x_2(-x_1-x_2-\text{sign}(x_2)) = -x_1^2 + \cancel{x_1x_2} - \cancel{x_1x_2} - x_2^2 - x_2\,\text{sign}(x_2) =$$

$$= \underbrace{-x_1^2-x_2^2}_{\text{forma quadratica definita negativa}} \underbrace{-x_2\,\text{sign}(x_2)}_{<0} < 0$$

Per il metodo diretto di Lyapunov il sistema è asintoticamente stabile. Tuttavia, le ipotesi di validità del metodo diretto è la continuità della funzione velocità, che in questo caso non è verificata (la funzione segno è discontinua).

Potrebbe accadere un fenomeno di CHATTERING cioè una vibrazione intorno all'origine dovuta alla discontinuità proprio nell'origine. Questo fenomeno è spiegato dalla TEORIA DEGLI SLIDING CONTROL.

(I)
$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_2 - \mu x_1 (x_1^2+x_2^2) \\ \dot x_2 = x_1 - \mu x_2 (x_1^2+x_2^2) \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Studio il sistema con il metodo di linearizzazione (metodo indiretto di Lyapunov). Il sistema linearizzato è:

Σ_{lin}: $\dot x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$ gli autovalori sono $\pm j$  CASO CRITICO!

Non posso usare la linearizzazione. Analizzo μ.

- se $\mu=0$, il sistema coincide con quello linearizzato e l'origine è quindi semplicemente stabile;
- se $\mu>0$, i comportamenti di $-\mu x_i^3$ sono stabilizzanti;
- se $\mu<0$, i comportamenti di $-\mu x_i^3$ sono destabilizzanti.

Uso il metodo diretto di Lyapunov per la stabilità asintotica e il metodo di Chetaev per l'instabilità.

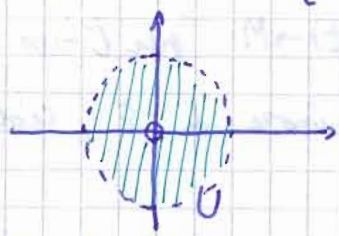
Scelgo $V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$ e calcolo $\dot V(x) = x_1\dot x_1 + x_2\dot x_2 = x_1(-\cancel{x_2}-\mu x_1(x_1^2+x_2^2)) + x_2(\cancel{x_1}-\mu x_2(x_1^2+x_2^2$

$= -\mu x_1^4 - \mu x_1^2x_2^2 - \mu x_1^2x_2^2 - \mu x_2^4 = -\mu x_1^4 - 2\mu x_1^2x_2^2 - \mu x_2^4 < 0$ se $\mu>0$ $\forall x\neq 0$

Per provare l'instabilità posso riutilizzare la funzione $V(x)$ già studiata.

Scelgo $\varepsilon=1$ (non critico) e un insieme $\{x\in\mathbb{R}^2 : V(x)>0\} \cap B_1$ che scelgo anche come U.

↳ cerchio aperto di raggio unitario



Le condizioni di Chetaev sono:

1. $0 \in \delta U$ → è punto limite di U e non appartiene a U (non è punto interno)
2. $V(x)=0 \quad \forall x \in \delta U \cap B_1$ → i punti in questione sono composti della sola origine (B_1 è il cerchio aperto e δU è la circonferenza e l'origine).
3. $\dot V(x)>0 \quad \forall x \in U$ → essendo $\mu<0$, $\dot V(x)>0 \ \forall x\neq 0$, ma l'origine non appartiene ad U.

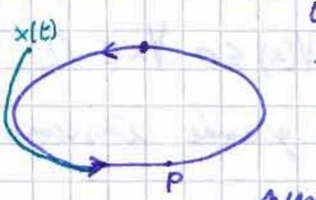
Le tre condizioni sono verificate e, pertanto, $x=0$ è instabile (se $\mu<0$).

LEZIONE 8

Sia $x(t)$ una soluzione di Σ:

1) Un punto P è detto PUNTO LIMITE POSITIVO di $x(t)$ se esiste una sequenza $\{t_n\}$ con $t_n\to\infty$ per $n\to\infty$ tale che $x(t_n)\to P$ per $n\to\infty$.

Non è detto esista $\lim_{t\to\infty} x(t)$, ad esempio per i cicli limite, in cui si continua a girare sul ciclo limite.



Tuttavia, ogni punto del ciclo limite è un punto limite positivo.

2) L'insieme di tutti i punti limite positivi di $x(t)$ è detto INSIEME LIMITE POSITIVO (o ω limit) di $x(t)$.

3) Un insieme $M\subseteq\mathbb{R}^n$ è detto INVARIANTE rispetto a Σ se $x(0)\in M \Rightarrow x(t)\in M \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

$J\subseteq\mathbb{R}^n$ è invariante rispetto alla matrice A se $AJ\subseteq J$

4) Un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto POSITIVAMENTE INVARIANTE se
$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \quad \forall t \geq 0$

5) Dato un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^n$ $x(t) \to M$ per $t \to \infty$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists T > 0$ tale che la distanza da $x(t)$ e M è minore di ε, cioè
$\text{dist}(x(t), M) < \varepsilon \quad \forall t > T$.

Un punto di equilibrio e un ciclo limite sono insiemi invarianti perché integrando in avanti o all'indietro si permane nel punto o sul ciclo.

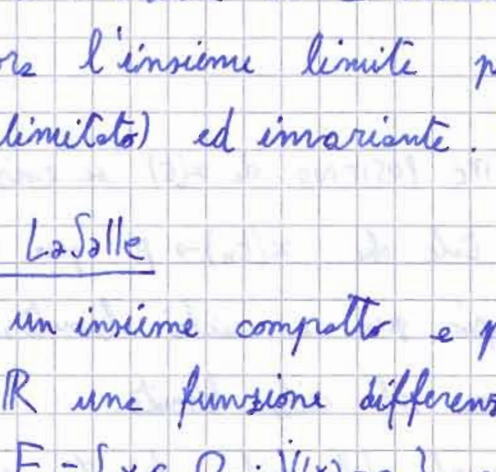
L'insieme $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ con $\dot{V}(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \Omega_c$ è un insieme positivamente invariante perché $V(x)$ è decrescente e quindi $V(x_0) \leq c \Rightarrow V(x(t)) \leq c$

Lemma

Sia $x(t)$ una soluzione di Σ limitata ed appartenente al dominio D $\forall t \geq 0$. Allora l'insieme limite positivo L^+ è non vuoto, compatto (chiuso e limitato) ed invariante. Inoltre $x(t) \to L^+$ per $t \to \infty$.

Teorema di LaSalle

Sia $\Omega \subseteq D$ un insieme compatto e positivamente invariante rispetto a Σ.
Sia $V: D \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $\dot{V}(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \Omega$.
Definiamo $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ e sia M il più grande insieme invariante contenuto in E.
Allora ogni soluzione con stato iniziale in Ω converge ad M per $t \to \infty$.

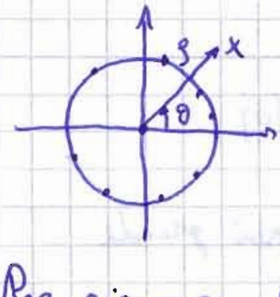


ESERCITAZIONE 2

La regione di attrazione R_A di un punto di equilibrio asintoticamente stabile è un insieme invariante, connesso e aperto. Inoltre la frontiera ∂R_A è composta da traiettorie del sistema Σ (immagine dei moti).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(1-x_1^2-x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_2(1-x_1^2-x_2^2) \end{cases}$$

Applico una trasformazione polare $\begin{cases} x_1 = \rho\cos\vartheta \\ x_2 = \rho\sin\vartheta \end{cases}$



$$T: [0,+\infty[\times [0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$$

$$(\rho,\vartheta) \to T(\rho,\vartheta) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{\rho} = f_1(\rho,\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = f_2(\rho,\vartheta) \end{cases}$$

Per ricavare f_1 e f_2 interpreto le equazioni della trasformazione in funzione del tempo e calcolo la derivata:

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho(t)\cos\vartheta(t) \\ x_2(t) = \rho(t)\sin\vartheta(t) \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\rho}\cos\vartheta + \rho\dot{\vartheta}(-\sin\vartheta) = \\ \dot{x}_2 = \dot{\rho}\sin\vartheta + \rho\dot{\vartheta}(\cos\vartheta) \end{cases}$$

Ma dal testo del sistema originario trovo che

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\rho\cos\vartheta(1-\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\sin^2\vartheta) = -\rho\cos\vartheta(1-\rho^2) \\ \dot{x}_2 = -\rho\sin\vartheta(1-\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\sin^2\vartheta) = -\rho\sin\vartheta(1-\rho^2) \end{cases}$$

Eguagliando con il sistema precedente:

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\vartheta + \rho\dot{\vartheta}(-\sin\vartheta) = -\rho\cos\vartheta(1-\rho^2) \\ \dot{\rho}\sin\vartheta + \rho\dot{\vartheta}(\cos\vartheta) = -\rho\sin\vartheta(1-\rho^2) \end{cases} \quad ? \quad \begin{cases} \dot{\rho} = -\rho(1-\rho^2) \\ \dot{\vartheta} = 0 \to \vartheta(t) = \vartheta_0 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono $\rho=0$ e $\rho=1$.

Lo Jacobiano è

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = -1+3\rho^2 \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=0} = -1 \to \rho=0 \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=1} = 2 \to \rho=1 \text{ è instabile}$$

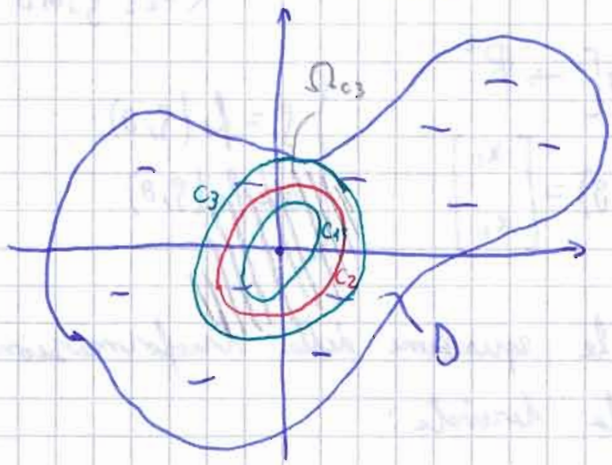
Per stimare la regione di attrazione posso usare il metodo della funzione di Lyapunov:

(a) trovo $V(x)$ tale che $V(x)>0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$ e, mediante il teorema di Lyapunov, provo che $\dot{V}(x)<0$ su $D \setminus \{0\}$ per la stabilità dell'origine

(b) individuo un insieme Ω_c, scegliendo opportunamente c, tale che

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$$

(c) se $\Omega_c \subseteq D$, allora $\Omega_c \subseteq R_A$



$V(x) > 0$ su D

$\dot{V}(x) < 0$ su $D \setminus \{0\}$

Scelgo c_3 perchè più grande possibile. $V(x) = c_3$.

Per trovare $V(x)$ posso:

- calcolare $A = \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x=0}$
- scelgo una matrice $Q>0$ (di solito identità)
- risolvo l'equazione di Lyapunov $PA + A^T P = -Q$
- trovo P
- calcolo $V(x) = x^T P x$

Esempio 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_2^2 - 1) x_2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix}$$

Equazione di Lyapunov

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

... in MATLAB: lyap(...).

Trovo $P = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ e trovo che $V(x) = x^T P x > 0$

- Per trovare $\dot{V}(x)$, ragiono sull'espressione simbolica:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = 2x^T P \dot{x} = \ldots = \underbrace{-(x_1^2 + x_2^2)}_{\substack{\text{forma quadratica} \\ \text{della matrice} \\ -Q = -I}} \underbrace{-(x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)}_{\substack{\text{termini di} \\ \text{ordine superiore}}}$$

Dovrei trovare i punti in cui $\dot{V}(x)$ è negativo, ma è difficile. Cerco quindi una stima della regione in cui $\dot{V}(x) < 0$

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2) = -\|x\|_2^2 - x_1^2 x_2 (x_1 - 2x_2) \leq -\|x\|_2^2 + |x_1^2 x_2| \, |x_1 - 2x_2| =$$
$$= -\|x\|_2^2 + |x_1| \, |x_1 x_2| \, |x_1 - 2x_2| \leq -\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \|x\|_2^4$$

perché:

- $|x_1| \leq 1 \|x\|_2$ cioè $x_1^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2} \|x\|_2^2$ cioè $x_1^2 x_2^2 \leq \frac{1}{4} (x_1^2 + x_2^2)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $|x_1 - 2x_2| \leq \sqrt{5} \|x\|_2$ cioè $(x_1 - 2x_2)^2 \leq 5(x_1^2 + x_2^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

Sia $p^k(x)$ il polinomio omogeneo di argomento $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e grado k.

Lemma:

$\exists \gamma > 0$ tale che $|p^k(x)| \leq \gamma \|x\|_2^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Il lemma dice che esiste γ ma non come calcolarlo. Per trovare γ nel ter[zo] caso anche senza trovare il migliore (più piccolo), posso fare:

$$|x_1 - 2x_2| \leq |x_1| + |-2x_2| = |x_1| + 2|x_2| \leq \|x\| + 2\|x\| = \underbrace{3}_{\gamma}\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Trovo quindi che la stima di $\dot{V}(x)$ deve essere

$$\dot{V}(x) \leq -\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \|x\|_2^2\right) \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

cioè, affinché $\dot{V}(x) < 0$, deve essere $1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \|x\|^2 > 0 \iff \|x\| < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 0.9457416$.

$D = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r = 0{,}9457 \}$

Devo ora trovare il valore c per costruire $\Omega_c \subseteq R_A$. Risolvo il problema

$$\max \overbrace{x^T P x}^{c}$$

$$\text{tale che } x^T x = r = 0{,}9457$$

Corollario del metodo diretto di Lyapunov

Se $V(x) = x^T P x$ è definita positiva su $\mathbb{R}^n$ e $\dot{V}(x)$ definita negativa sulla sfera aperta $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, allora $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x < \lambda_{min}(P)\, r^2\} \subseteq R_A$.

Esempio 4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 2x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 2x_2^3 \end{cases}$$

a. Si dimostri che il punto di equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Il sistema linearizzato è Σ_{lin} $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \rightarrow (s+2)^2 + 1 = \underbrace{s^2 + 4s}_{P}\underbrace{+5}_{P}$

b. Indicata con R_A la regione di attrazione dell'origine, si costruisca un "sottoinsieme stima" $L \subseteq R_A$.

Posso anche provare a scegliere $V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$.

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-2x_1 + x_2 + 2x_1^3) + x_2(-x_1 - 2x_2 + 2x_2^3) = -2x_1^2 + \cancel{x_1 x_2} + 2x_1^4 - \cancel{x_1 x_2} - 2x_2^2 + 2x_2^4$$

$$= \underbrace{-2x_1^2 - 2x_2^2}_{\text{parte quadratica definita negativa.}} + 2x_1^4 + 2x_2^4 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1^4 + x_2^4)$$

Devo costruire una stima: lavoro con le norme euclidee.

$$\dot{V}(x) = -2\|x\|^2 + 2(x_1^4 + x_2^4)$$

Voglio dominare la parte $x_1^4 + x_2^4$ con la norma alla quarta di x.

$$\begin{cases} x_1^4 \le \|x\|^4 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \\ x_2^4 \le \|x\|^4 & \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \le 2\|x\|^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Ma è facile vedere che è vera anche questa disuguaglianza (più stringente)

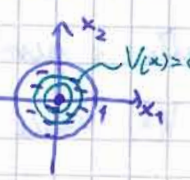
$$x_1^4 + x_2^4 \le \|x\|^4 = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sfrutto la disequazione migliore:

$$\dot{V}(x) = -2\|x\|^2 + 2(x_1^4 + x_2^4) \le -2\|x\|^2 + 2\|x\|^4 = -2\|x\|^2(1 - \|x\|^2)$$

Questa disuguaglianza dice che $\dot{V}(x)$ è definita negativa per tutti gli x che rendono positivo il termine $(1 - \|x\|^2)$ ovvero

$$1 - \|x\|^2 > 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 < 1 \Leftrightarrow \|x\| < 1 \Leftrightarrow B_1$$



Le curve di livello sono dei cerchi concentrici.

Per costruire la stima devo cercare $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \le c\}$ più grande possibile, ovvero il cerchio unitario B_1.

In alternativa, sfruttando il lemma, potevo costruire la stima come:

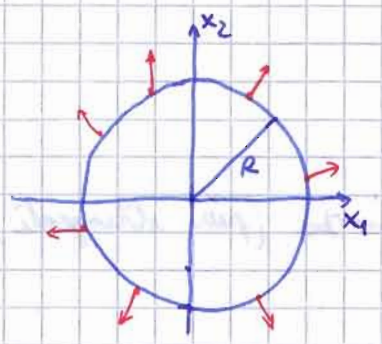
$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x^T P x < \lambda_{min}(P) \cdot r^2\} \subseteq R_A \quad \text{con } P \text{ matrice simmetrica associata a } V(x)$$

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = [x_1 \ x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T P x < \lambda_{min}(P) \cdot r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < 1 \Leftrightarrow \|x\|^2 < 1.$$

c. Si costruisca un insieme U limitato tale che $U \supseteq R_A$.

Non sempre esiste U: dipende se R_A è limitata. Se valuto i due termini non lineari del sistema, noto che per termini grandi di x_1 (o x_2), la componente non lineare domina e la velocità è positiva - negativa che fa divergere all'infinito. Se mi allontano troppo dall'origine, diverge $\Rightarrow$ regione di attrazione limitata.



$B_R \to$ sfera di raggio R

$\mathbb{R}^2 \setminus B_R$ è positivamente invariante (se parto da lì vi permango) $\Rightarrow B_R \supset R_A$

Devo quindi individuare un raggio R tale che tutti i punti della circonferenza di raggio R hanno velocità divergenti (uscenti).

Ragionando alla Lyapunov, considero la circonferenza come $V(x) = R$ cioè $\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = R$, e cerco di dimostrare che $\dot{V}(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|x\| = R$ cioè che tutti i punti della circonferenza hanno velocità positive e quindi che $V(x)$ cresce e la traiettoria risulta essere uscente.

Provo a scegliere $R=3$. Valuto $\dot{V}(x)$ esatta in $(x_1^2+x_2^2)^{1/2} = 3$ $\quad x_1^2+x_2^2 = 9$ cioè $x_1 = \pm\sqrt{9-x_2^2}$

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^2+x_2^2) + 2(x_1^4+x_2^4) = -2\cdot 9 + 2\left((9-x_2^2)^2 + x_2^4\right) = -18 + 2(81 + x_2^4 - 18x_2^2 + x_2^4)$$
$$= -18 + 162 + 4x_2^4 - 36x_2^2 = 4x_2^4 - 36x_2^2 + 144 \quad \text{con } x_2 \in [-3, 3]$$

$\dot{V}(x) > 0 \quad x_2^4 - 9x_2^2 + 36 > 0 \quad t = x_2^2 \quad t^2 - 9t + 36 > 0$

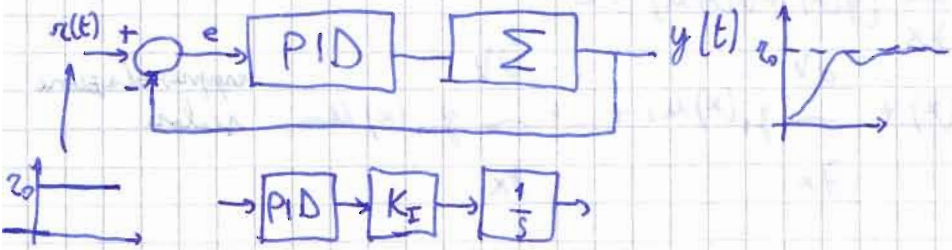
Se la forma quadratica ha $\Delta < 0$, $\dot{V}(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Delta = 81 - 144 = -63 < 0$ ok

Quindi l'insieme $U \supseteq R_A$ che ho trovato è la palla B_3 di raggio 3

LEZIONE 9

Un classico problema di regolazione è riconducibile a un problema di stabilizzazione.



Se voglio uscita costante, il segnale manipolabile è costante e quindi l'errore deve essere 0. $e=0$ vuol dire stabilizzare il sistema.

RETROAZIONE LINEARE

Il sistema $\dot{x} = f(x,u)$ viene linearizzato sull'equilibrio $x=0$ e $u=0$:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\Big|_{x=0,\, u=0}$ e $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\Big|_{x=0,\, u=0}$

Se la coppia (A,B) è controllabile (cioè $\exists$ un K che fa sì che lo spettro di autovalori è arbitrario) o almeno stabilizzabile ($\sigma(A-BK) = \sigma(\text{assegnabile}) \cup \sigma(\text{fisso})$), la stabilizzazione locale Σ è conseguibile:

sia $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $\sigma(A-BK) \subseteq \mathbb{C}_-$

$u = -Kx \Rightarrow \Sigma_r : \dot{x} = f(x, -Kx) = f_r(x)$ sia $f(\alpha,\beta)$ con $\alpha = x$, $\beta = -Kx$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big|_{\substack{\alpha=x\\ \beta=-Kx}} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big|_{\substack{\alpha=x\\ \beta=-Kx}} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,-Kx) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{I} + \frac{\partial f}{\partial u}(x,-Kx) \underbrace{\frac{\partial(-Kx)}{\partial x}}_{-K} = A - BK$$

Per il metodo indiretto di Lyapunov, $x=0$ di Σ_r è asintoticamente stabile

CONTROL LYAPUNOV FUNCTIONS

Una funzione $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V \in C^1$ definita positiva è detta FUNZIONE DI LYAPUNOV PER IL CONTROLLO se
$\forall x \neq 0 \ \exists u \in \mathbb{R}^m$ tale che $\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + G(x)u) < 0$.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + G(x)u) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) u_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x} g_m(x) u_m.$$ rappresentazione scalare

Il problema principale di un primo approccio $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ è la mancanza di parametri di tuning.

BACKSTEPPING

È un metodo ricorsivo. La ricorsione consente di migliorare la soluzione trovata.
Deve esistere una retroazione virtuale $\phi(x)$ che stabilizza lo stato $x=0$ del sottosistema $\dot{x} = f(x) + g(x)\xi$. $V(x)$ è la funzione di Lyapunov che permette di dimostrare la stabilità asintotica.
Sommo e sottraggo il termine $g(x)\phi(x)$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)[\xi - \phi(x)] \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Impongo il cambio di variabile $z = \xi - \phi(x)$ con $\dot{z} = \dot{\xi} - \frac{d}{dt}\phi(x) = u - \frac{\partial \phi}{\partial x}\dot{x}$.
Impongo il cambio di variabile di controllo $v = \dot{z}$

$$v = \dot{z} = u - \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\xi\right]$$

Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\phi(x) + g(x)z \\ \dot{z} = v \end{cases}$$

Devo trovare una retroazione $v = K_v(x,z)$ stabilizzante.

Scelgo $V_1(x,z) = V(x) + \frac{1}{2} z^2$ definita positiva su $D \times \mathbb{R}$

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \dot{z} = \frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\phi(x) + g(x) z\right] + z \cdot v = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x)+g(x)\phi(x)\right]}_{\text{definita negativa}} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x} g(x) z + z v}_{\text{da stabilizzare}}$$

Scelgo $v = K_v(x,z) = -\frac{\partial V}{\partial x} g(x) - kz$, $k > 0$

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\phi(x)\right] - kz^2 < 0.$$

Ricordo che $v = u - \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\xi\right]$ e quindi $u = v + \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x)+g(x)\xi\right]$

$$u = -\frac{\partial V}{\partial x} g(x) - kz + \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\xi\right]$$

ma essendo $z = \xi - \phi(x)$ ottengo la formula di integrator backstepping:

$$\boxed{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\xi\right] - \frac{\partial V}{\partial x} g(x) - k\left[\xi - \phi(x)\right], \quad k > 0}$$

Il metodo parte da un integratore ($v = \dot{z}$) e torna a un integratore (ritornando alle variabili originarie).

La regione di attrazione dell'origine è $R_x \times \mathbb{R}$ con $R_x \subseteq D$ regione di attrazione di $x = 0$ ($\subseteq \mathbb{R}^n$)

ESERCITAZIONE 3

Stimare la regione di attrazione:

(a) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + x_2^4 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 8x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

Verifico, con il sistema linearizzato, che l'origine è asintoticamente stabile

$$\Sigma_{lin} \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}}_{A} x \qquad \det\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -2 & s+8 \end{bmatrix} = (s+3)(s+8) - 2 = s^2 \overset{P}{+ 11s} \overset{P}{+ 22}$$

$x = 0$ è asintoticamente stabile. $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ solo localmente (termini x_2^4, Scelgo $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ e calcolo $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-3x_1 + x_2 + x_2^4) + x_2(2x_1 - 8x_2 + x_1^2) =$$
$$= -3x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2^4 + 2x_1x_2 - 8x_2^2 + x_1^2x_2 =$$
$$= \underbrace{-3x_1^2 + 3x_1x_2 - 8x_2^2}_{\text{FORMA QUADRATICA}} + x_1x_2^4 + x_1^2x_2$$

La stima della regione di attrazione sarà un cerchio che deve essere contenuta in $\dot{V}(x)$.

Mi chiedo se esiste un intorno dell'origine in cui $\dot{V}(x) < 0$.

Per (x_1, x_2) piccoli, la parte dominante è quella quadratica

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3/2 \\ 3/2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La matrice deve essere definita negativa. Uso il criterio di Sylvester:

$-3 < 0$ ok!

$(-3)(-8) - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = 24 - \frac{9}{4} > 0$ ok!

Quindi, $\forall x \neq 0$ la forma quadratica è sempre definita negativa.

$\Rightarrow \exists$ un intorno in cui $\dot{V}(x) < 0$.

Devo ora costruire una stima rimanendo nell'idea di stime circolari. Devo dominare la parte non quadratica con quella quadratica, che però è un'ellisse. Uso le formule di Rayleigh:

$$x^T P x \leq \lambda_{max}(P)\, \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Gli autovalori di P, calcolati risolvendo $(s+3)(s+8) - \frac{9}{4} = 0$, sono

$\sigma(P) = \{-8,4455 ; -2,5845\}$

$$\dot{V}(x) = -3x_1^2 + 3x_1x_2 - 8x_2^2 + x_1x_2^4 + x_1^2x_2 \leq -2,5845\|x\|^2 + x_1x_2(x_2^3 + x_1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$
$$\dot{V}(x) \leq -2,5845\|x\|^2 + |x_1x_2|\,|x_2^3 + x_1| \leq -2,5845\|x\|^2 + |x_1x_2|\,(|x_2|^3 + |x_1|)$$
$$\dot{V}(x) \leq -2,5845\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2(\|x\|^3 + \|x\|) = -\|x\|^2\left(2,5845 - \frac{1}{2}\|x\|^3 - \frac{1}{2}\|x\|\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

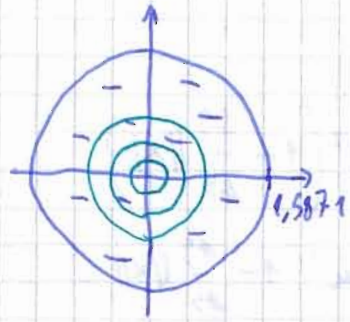
Devo garantire la positività del termine fra parentesi.

Devo risolvere un'equazione cubica!

$$2,5845 - \frac{1}{2}\left(\|x\|^3 + \|x\|\right) > 0 \qquad 5,1690 - \|x\|^3 - \|x\| > 0$$

$r^3 + r - 5,1690 = 0 \underset{\text{Matlab}}{\Longrightarrow}$ la radice positiva è $r = 1,5871$

$\dot{V}(x)$ è definita negativa su B_r cioè $\forall x$ tale che $\|x\| < 1,5871$



(b) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - 8x_2 + x_2^2 \end{cases}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ $\det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 7 & s+8 \end{bmatrix} = (s+1)(s+8) + 7 =$

$= \underbrace{s^2 + 9s}_{P} + \underbrace{15}_{P}$ ✓

$x=0$ è asintoticamente stabile.

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \dot{V}(x) = \ldots = \underbrace{-x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_2^2}_{q(x) \text{ PARTE QUADRATICA}} + x_1x_2^2 + x_2^3$$

$$q(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Sylvester: $-1 < 0$ ok!

$(-1)(-8) - 9 = 8 - 9 = -1 < 0$ <u>NO</u>!

Risolvo l'equazione di Lyapunov per trovare la stima:

$PA + A^T P = -Q$ scelgo $Q = I_2$ e $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}$ simmetrica

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots \quad \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \quad \ldots$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{64}{135} & \frac{1}{270} \\ \frac{1}{270} & \frac{17}{270} \end{bmatrix}$$

Scelgo quindi $V(x) = x^T P x$ e $\dot V(x)$ la calcolo:

$$\dot V(x) = \dot x^T P x + x^T P \dot x \overset{\text{TRASPONGO}}{=} x^T P \dot x + x^T P \dot x = 2 x^T P \dot x = 2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{64}{135} & \frac{1}{270} \\ \frac{1}{270} & \frac{17}{270}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1+x_2+x_2^2 \\ -7x_1-8x_2+x_2^2\end{bmatrix}$$

$$= \dots = \underbrace{-x_1^2 - x_2^2}_{\substack{\text{deve essere il}\\ \text{termine quadratico}\\ \text{corrispondente a}\\ -Q = -I_2.}} + \frac{43}{45}x_1x_2^2 + \frac{2}{15}x_2^3.$$

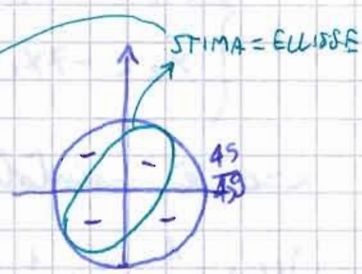
$$\dot V(x) \le -\|x\|^2 + \frac{43}{45}\|x\|^3 + \frac{2}{15}\|x\|^3 = -\|x\|^2 + \frac{49}{45}\|x\|^3 = -\|x\|^2\left(1-\frac{49}{45}\|x\|\right)$$

Per avere $\dot V(x)<0$ devo imporre la positività di $1-\frac{49}{45}\|x\|$.

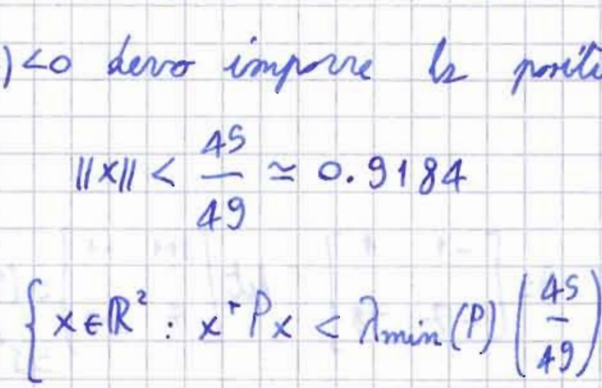
$$1-\frac{49}{45}\|x\| > 0 \qquad \|x\| < \frac{45}{49} \simeq 0.9184$$

La stima è $\left\{x\in\mathbb{R}^2 : x^TPx < \lambda_{min}(P)\left(\frac{45}{49}\right)^2\right\} \subseteq R_A$

$\lambda_{min}(P) = 0,062929599 \Rightarrow \left\{x\in\mathbb{R}^2 : x^TPx < 0,0531\right\} \subseteq R_A$



PENDOLO SU CARRELLO



$$\underbrace{L}_{\substack{\text{FUNZIONE}\\\text{LAGRANGIANA}}} = \overbrace{K}^{\substack{\text{ENERGIA}\\\text{CINETICA}}} - \underbrace{P}_{\substack{\text{ENERGIA}\\\text{POTENZIALE}}} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau_i$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot y} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = u \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot \theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

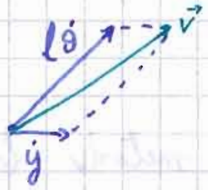
nessun attrito rotazionale

$$K = \frac{1}{2}m_c\dot y^2 + \frac{1}{2}m_p v^2$$

$$P = m_p g \ell (1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_c \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_p v^2 + m_p g l - m_p g l \cos\theta$$

La velocità del pendolo è data dalla velocità del carrello + la velocità tangenziale del pendolo:



$$\vec{v} = \dot{y} + l\,\dot\theta\, e^{j\theta} = \dot{y} + l\,\dot\theta\,(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} (m_c + m_p)\ddot{y} + m_p l\left(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2\sin\theta\right) = u \\ \ddot{y}\cos\theta + l\ddot\theta + g\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Scelgo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot y \\ \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot y \\ \ddot y \\ \dot\theta \\ \ddot\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_4 \\ \dots \end{bmatrix}$$

devo risolvere sistemi lineari $\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$

LEZIONE 10

Il metodo backstepping può essere applicato in modo ricorsivo per garantire la stabilità in sistemi più generali.

Il dominio di attrazione dipende dal dominio di attrazione di $\phi_0(x)$ sul sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,\xi_1 \\ \dot\xi_1 = \xi_2 \\ \dot\xi_2 = u \end{cases}$$

considero ξ_2 come variabile di controllo.

$$\xi_2 = \phi_1(x, \xi_1) \overset{\text{metodo backstepping}}{=} \frac{\partial \phi_0}{\partial x}\left[f(x) + g(x)\,\xi_1\right] - \frac{\partial V_0}{\partial x} g(x) - k_1\left[\xi_1 - \phi_0(x)\right], \quad k_1 > 0$$

$$V_1(x, \xi_1) = V_0(x) + \frac{1}{2}\left[\xi_1 - \phi(x)\right]^2$$

Riscrivo il sistema come

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot\xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x)+g(x)\xi_1 \\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\xi_2 \\ \dot\xi_2 = u\end{cases}$$

e riapplico il metodo backstepping

$$u=\phi_2(x,\xi_1,\xi_2) = \frac{\partial\phi_1}{\partial\begin{bmatrix}x\\\xi_1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix} f(x)+g(x)\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial \begin{bmatrix}x\\\xi_1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - K_2\left[\xi_2-\phi_1(x,\xi_1)\right], \quad K_2>0$$

con $\partial\begin{bmatrix}x\\\xi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} & \frac{\partial\phi_1}{\partial\xi_1}\end{bmatrix}$

$$V_2(x,\xi_1,\xi_2) = V_1(x,\xi_1) + \frac{1}{2}\left[\xi_2-\phi_1(x,\xi_1)\right]^2$$

I sistemi triangolari sono un particolare tipo di sistema in cui la matrice associata è triangolare, cioè ogni velocità dipende solo dalle variabili di controllo precedenti.
Per questo tipo di sistemi è possibile applicare il metodo backstepping

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_1^2 - x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot x_2 = x_1 + x_2 + (1+x_2^2)x_3 \\ \dot x_3 = x_3 + u\end{cases}$$

Con $\phi_0(x_1)=0$ come nelle slides ottengo $R_A =]-1,1[\times\mathbb{R}^2$. Tuttavia, se accetto di complicare i calcoli scegliendo $\phi_0(x_1)=x_2$ più complessa, posso ottenere $R_A=\mathbb{R}^3$.

Scelgo $x_2=\phi_0(x_1) = -K_0 x_1$

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_1^2 - x_1 - K_0 x_1^3 \\ \phi_0(0)=0\end{cases}$$

L'origine è asintoticamente stabile se

Se x_1 è piccolo, domina $-x_1$ ok!

Se x_1 è molto grande, domina $-kx_1^3$ ok se $k_0>0$!

Se x_1 è intermedio potrebbe dominare $x^2 \Rightarrow$ scelgo $k_0 >> 0$.

$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1 + k_0 x_1^2)$ affinché $x_1=0$ sia globalmente asintoticamente stabile deve essere:

$1 - x_1 + k_0 x_1^2 > 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$ calcolo Δ

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4k_0 < 0$ affinché le radici siano complesse coniugate

$$k_0 > \frac{1}{4}$$

REGOLAZIONE

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x) \end{cases}$$ con $h(x)$ funzionale non lineare

INSIEME DEGLI EQUILIBRI ESTERNI $\mathcal{E} \rightarrow$ insieme delle coppie (u,y) per cui esiste uno stato x_e in cui la velocità è nulla $f(x_e,u)=0$ e $y=h(x_e)$.

Il problema della regolazione è determinare una strategia per passare da un equilibrio esterno corrente ad uno desiderato.

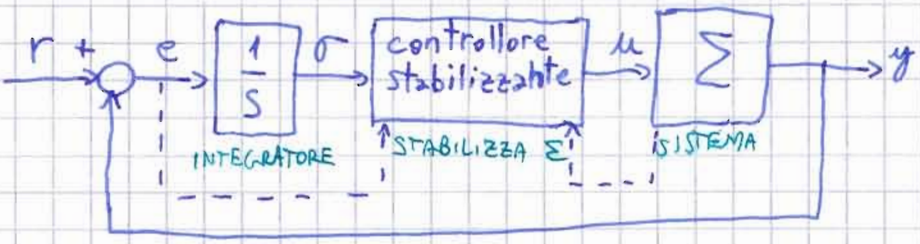
Applicando la stabilizzazione del sistema, in modo da garantire che il punto di destinazione x_b sia asintoticamente stabile e che x_a appartenga alla regione di attrazione di x_b, trovo questa strategia.

Il controllo mi rende x_b punto di equilibrio asintoticamente stabile con $R_A(x_b)$ che contiene x_a.

Il problema di questa soluzione è che la retroazione la faccio sullo stato (il modello deve essere esatto!). Inoltre non riesco a

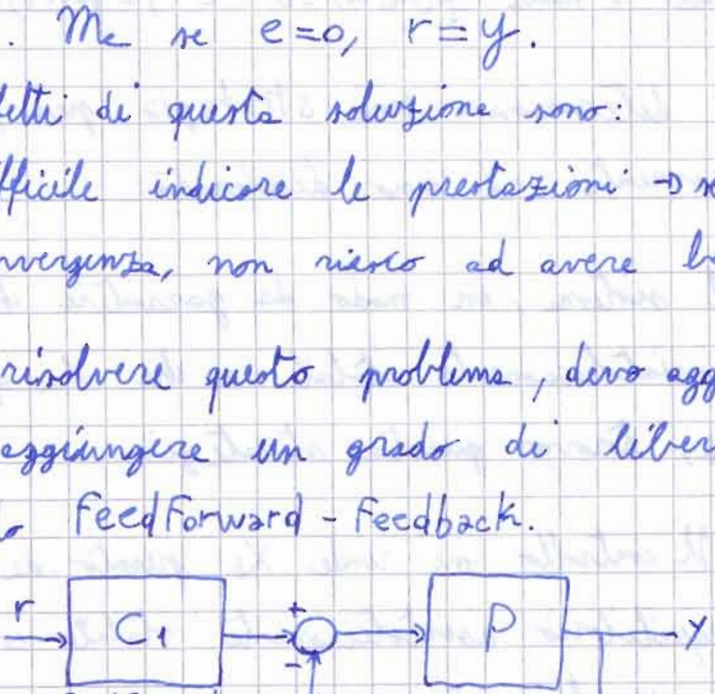
imporre le specifiche tradizionali, come le sovraelongazione e sottoelongazione.
Si possono trovare soluzioni alternative per regolare la sovraelongazione considerando che vorrei fossero sempre 0.
La sottoelongazione è tipica dei sistemi a fase non minima, che hanno cioè zeri a parte reale positiva.

Un esempio di regolatore più efficiente è il regolatore con integratore, caso particolare del P.I.D.



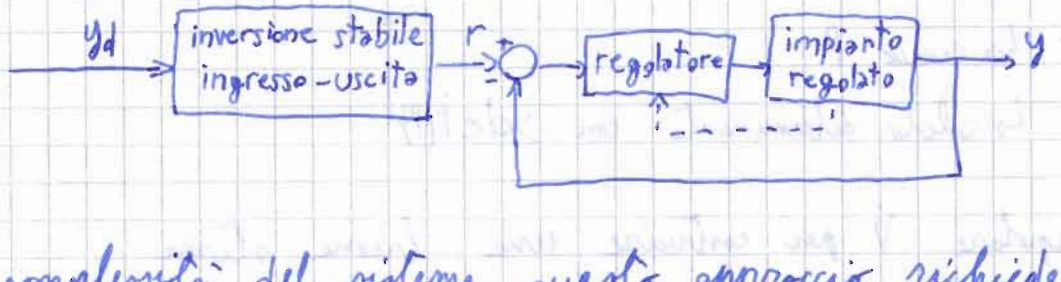
Al posto del P.I.D. ho un integratore e un controllore stabilizzante.
Il controllore stabilizzante stabilizza Σ su un punto di equilibrio in cui lo stato, e quindi e, σ e u che vi dipendono, è costante.
Per essere σ = costante, essendo uscita di un integratore, deve essere e = 0. Ma se e = 0, r = y.
I difetti di questa soluzione sono:
- difficile indicare le prestazioni → se voglio buone velocità di convergenza, non riesco ad avere basse sovraelongazioni.

Per risolvere questo problema, devo aggiungere un regolatore feedforward per aggiungere un grado di libertà. Si ha quindi un approccio ibrido FeedForward - Feedback.



Un metodo alternativo è l'inversione ingresso uscita, che sfrutta l'insieme dei behaviours $B = \{(u(\cdot), y(\cdot)) : y(t)$ è l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t)\}$.
Il problema è, data una funzione desiderata $y_d(t)$, trovare una funzione di ingresso $u(t)$ tale che $(u(t), y(t)) \in B$.
Tuttavia, affinché il problema abbia soluzione, $y_d(t)$ non può essere arbitraria, ma deve essere sufficientemente liscia (cioè continua fino al grado relativo del sistema n° poli − n° zeri). Inoltre, anche con $y_d(t)$ limitata, potrei trovare una $u(t)$ illimitata! ~~Devo quindi~~ aggiungere una condizione al problema $\|u(t)\|_\infty < \infty$. Il nome del metodo diventa inversione stabile ingresso-uscita.
Questo sistema però non soddisfa il principio del modello interno.

Un metodo risolutivo del problema precedente è l'applicazione dell'inversione ingresso-uscita al sistema retroazionato per generare il segnale r a partire dal segnale di uscita desiderato y_D.



Per la complessità del sistema, questo approccio richiede dei controllori digitali.

ESERCITAZIONE 4

① $> A = [-1\ 1\ 0;\ 1\ -2\ 1;\ 0\ 0\ 1]$
$> \mathrm{eig}(A)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1^2 \end{cases}$$

AUTOVALORI : $\left.\begin{matrix} -0{,}382 \\ -2{,}618 \\ -1{,}000 \end{matrix}\right\} < 0 \Rightarrow$ asintoticamente stabile

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

$$\dot V = x_1\dot x_1 + x_2\dot x_2 + x_3\dot x_3 = x_1\left(-x_1+x_2+x_2^3\right) + x_2\left(x_1-2x_2+x_3\right) + x_3\left(-x_3+x_1^2\right)$$

Aggiungo le tre variabili simboliche

```
>syms x1 x2 x3 real
>Vdot = x1*(-x1+x2+x2^3) + x2*(x1-2*x2+x3) + x3*(-x3+x1^2)
>expand(Vdot)
```

espande in monomi

$$\dot V = \underbrace{-x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3}_{} + x_1x_2^3 + x_1^2x_3$$

$:2$ $\quad$ $:2$

$$\hookrightarrow q(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Devo verificare che $P<0$ con il criterio di Sylvester:

$-1<0$ ✓

$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2-1 = 1 > 0$ ✓

$\det P < 0$ uso Matlab $= -0{,}75 < 0$ ✓

↳ carico P

↳ calcolo determinante con `>det(P)`

Devo manipolare $\dot V$ per costruire una buona stima.

Calcolo gli autovalori di P

```
>eig(P)
```

`>max(eig(P))`

$\sigma(P) = \{-2{,}7247,\ -1,\ -0{,}2753\}$

So che vale $\quad q(x) = \dot V \le \lambda_{max}(P)\,\|x\|^2 \le \lambda_{max}(P)\,\|x\|^2 + |x_1x_2|\,|x_2|^2 + |x_1x_3|\,|x_1|$

$|x_1x_2| \le \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^2$ e anche $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$|x_1x_3| \le \frac{1}{2}\|x\|^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^3$ e così via

$|x_2|^2 \le \|x\|^2$

$$\dot V \le -0{,}2753\,\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^4 + \frac{1}{2}\|x\|^3 = -\|x\|^2\left(+0{,}2753 - 0.5\,\|x\|^2 - 0.5\,\|x\|\right)$$

Devo garantire la positività dell'espressione tra parentesi. Devo calcolare le radici di un'espressione quadratica.

$$0.2753 - 0.5\|x\|^2 - 0.5\|x\| > 0$$

$$\underbrace{-0.5r^2}_{p} - \underbrace{0.5r}_{v} + 0.2753 > 0$$

una radice a parte reale positiva e una negativa.

In MATLAB:

```
> roots([-0.5  -0.5  0.2753])
```

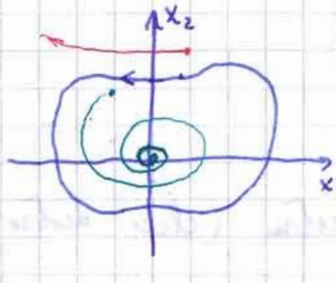
ans = -1,3948 0,3948

Quindi; $\forall x \in B_r$ con $r = 0,3948$ abbiamo $\dot{V}$ definita negativa

La stima della regione di attrazione è quindi la sfera aperta di raggio 0,3948.

② $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$$

Voglio determinare la regione di attrazione mediante simulazione nell'origine. L'origine è un fuoco stabile, come già calcolato nell'esercitazione 2.



Il fuoco è instabile.

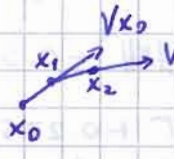
Per la simulazione uso l'integrazione all'indietro e verifico di convergere nel ciclo limite. Per fare questo devo cambiare di segno le variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (x_1^2 - 1)x_2 \end{cases}$$

L'algoritmo più semplice per integrare un sistema dinamico è il metodo di Eulero:

$\dot{x} = f(x,t)$ con condizione iniziale $x(0) = x_0$

$x(\Delta t) = x(0) + \dot{x}(0)\Delta t = x(0) + f(0,0)\cdot \Delta t$



L'istruzione MATLAB che useremo è $\underset{\uparrow \text{ approssimazione}}{\text{ode }45}$. Devo prima definire il sistema dinamico.

Per definire il sistema dinamico creo un file .m :

L'istruzione generale di ode45 è

$$\underbrace{[t, x]}_{} = \text{ode45}(@\text{Fun}, [t_0, t_f], x_0, \text{options})$$

vettore degli istanti di tempo — valori dello stato ad ogni istanti di tempo — funzione di stato del sistema — intervallo di tempo — stato iniziale — opzioni.

Per definire la funzione di stato del sistema (cambiato di segno):

```
function dx = system2 (t,x)
```
(system2: nome arbitrario)

```
dx = zeros (2,1);   % vettore colonna di due componenti
dx (1) = x(2);
dx(2) = - x(1) - (x(1)^2 - 1) * x(2);
end
```

Creando un file Function nello spazio di lavoro a destra (clic destro - new file - function) e dandogli nome system2.m.

Poi eseguo l'istruzione

```
>[t, x] = ode45 (@system2, [0, 100], [0.1; 0.1])
```

E plotto i risultati con

```
> plot (x(:,1), x(:,2))
```

③ $\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$ $\quad \sigma = 10 \quad b = 8/3 \quad r = 28$

Devo simulare i fenomeni caotici dell'oscillatore di Lorentz.

(a) definisco la funzione Lorentz.m

```
Function   dx= Lorentz (t,x)
  dx= zeros (3,1);
  dx(1)= 10*(x(2)-x(1));
  dx(2)= 28*x(1) -x(2) - x(1)*x(3);
  dx(3)= x(1)*x(2) -8/3*x(3);
end
```

(b) chiamo la funzione ode45

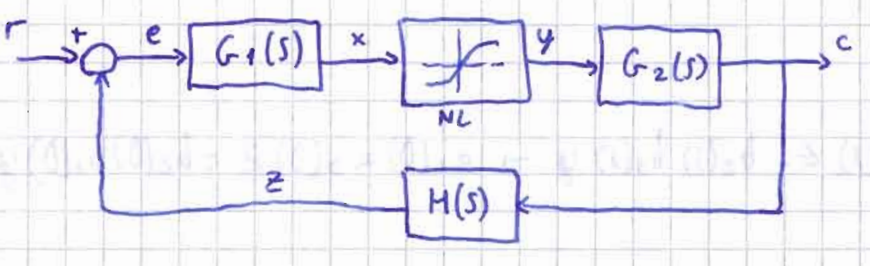
```
> [t,x]= ode45 (@Lorentz, [0,100], [1;1;1])
```

(c) plotto il risultato

```
> plot3 (x(:,1), x(:,2), x(:,3))
```

LEZIONE 11

Consideriamo un sistema retroazionato:



$G_1(s), G_2(s), H(s)$ lineari

$\left.\begin{array}{l} K_1 = G_1(0) \\ K_2 = G_2(0) \\ K_3 = H(0) \end{array}\right]$ guadagni statici

$\begin{cases} x = K_1(r - K_3 c) \\ c = K_2 y \end{cases} \rightarrow y = -\dfrac{1}{K_1 K_2 K_3} x + \dfrac{1}{K_2 K_3} r$

Metto a sistema l'equazione della parte lineare del sistema con $y = f(x)$

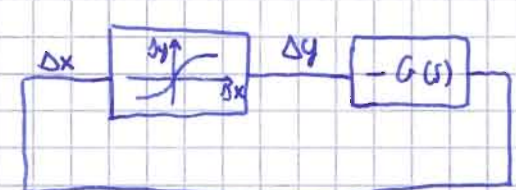
$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{k_1 k_2 k_3} x + \dfrac{1}{k_2 k_3} r \\ y = f(x) \end{cases}$$ $\rightarrow$ trovo la soluzione (x_1, y_1), solitamente instabile

Per semplificare l'analisi, faccio un cambio di variabile:

$x = x_1 + \Delta x$

$y = y_1 + \Delta y$

cioè considero una nuova origine degli assi in (x_1, y_1). Il sistema diventa



$G(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, H(s)$

La parte non lineare $y = f(x)$ diventa

$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - y_1 .$$

Per arrivare al sistema semplificato, vedo $G_1(s) = \dfrac{b_1(s)}{a_1(s)}$, $G_2(s) = \dfrac{b_2(s)}{a_2(s)}$ e $H(s) = \dfrac{b_3(s)}{a_3(s)}$. Avremmo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1(s)}{a_1(s)} e \quad \rightarrow \quad a_1(s) \cdot x = b_1(s) \cdot e \quad \rightarrow \quad a_1(D)\, x = b_1(D)\, e \\ e = r - z \\ z = \dfrac{b_2(s)\, b_3(s)}{a_2(s)\, a_3(s)} y \rightarrow a_2(s) a_3(s)\, z = b_2(s)\, b_3(s)\, y \rightarrow a_2(D)\, a_3(D)\, z = b_2(D)\, b_3(D)\, y \end{cases}$$

Faccio il cambio di variabile $x = x_1 + \Delta x$, $y = y_1 + \Delta y$, $e = e_1 + \Delta e$, $z = z_1 + \Delta z$

$$\begin{cases} a_1(D)(x_1 + \Delta x) = b_1(D)(e_1 + \Delta e) \\ e_1 + \Delta e = r_1 - (z_1 + \Delta z) \\ a_2(D)\, a_3(D)\, (z_1 + \Delta z) = b_2(D)\, b_3(D)\, (y_1 + \Delta y) \end{cases}$$

All'equilibrio (della 2) $e_1 = r_1 - z_1 \Rightarrow \Delta e = -\Delta z$

$= a_{1,n_1} D^{n_1} + \dots + a_{1,1} D + a_{1,0}$ è cost

Dalla prima equazione segue $a_1(D)\Delta x + a_{1,0} x_1 = b_1(D)\Delta e + b_{1,0} e_1$ ma essendo $G_1(0) = \frac{b_{1,0}}{a_{1,0}}$, l'equazione diventa $a_1(D)\Delta x = b_1(D)\Delta e$

Analogamente la terza equazione diventa

$$a_2(D)a_3(D)\Delta z + a_{2,0}\cancel{a_{3,0} z_1} = b_2(D)b_3(D)\Delta y + b_{2,0}\cancel{b_{3,0} y_1}$$

$$\begin{cases} a_1(D)\Delta x = b_1(D)\Delta e \\ \Delta e = -\Delta z \\ a_2(D)a_3(D)\Delta z = b_2(D)b_3(D)\Delta y \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1(D)\Delta x = -b_1(D)\Delta z \\ a_2(D)a_3(D)\Delta z = b_2(D)b_3(D)\Delta y \end{cases}$$

Devo eliminare la variabile Δz. Moltiplico la prima equazione per $a_2(D)a_3(D)$ e la seconda per $-b_1(D)$:

$$\begin{cases} a_2(D)a_3(D)a_1(D)\Delta x = \underline{-a_2(D)a_3(D)b_1(D)\Delta z} \\ \underline{-b_1(D)a_2(D)a_3(D)\Delta z} = -b_1(D)b_2(D)b_3(D)\Delta y \end{cases}$$

$$a_1(D)a_2(D)a_3(D)\Delta x = -b_1(D)b_2(D)b_3(D)\Delta y$$

Ricavando la funzione di trasferimento $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ nel dominio di Laplace si ottiene:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{b_1(s)b_2(s)b_3(s)}{a_1(s)a_1(s)a_3(s)} = -G_1(s)G_2(s)H(s) = -G(s).$$

Devo ora analizzare i cicli limite. Uso x invece che Δx per semplicità

IPOTESI

1. La non linearità è simmetrica e dispari, cioè $f(x) = -f(-x)$
2. Il sistema lineare $G(s)$ è un filtro passa basso
3. $x = X\sin\omega t$ (approssimazione)

$$y(t) = f(X \sin \omega t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fourier}}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

con $Y_n = |a_n + jb_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\qquad \varphi_n = \arg(a_n + jb_n)$

Semplifico considerando solo la prima armonica, visto che $G(s)$ è un passa basso (per ipotesi):

$$y(t) \simeq Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

FUNZIONE DESCRITTIVA

$$\boxed{F(X) = \frac{a_1(X) + jb_1(X)}{X} = \frac{Y_1(X)}{X} e^{j\varphi_1(X)}}$$

risposta armonica dell'elemento non lineare

Non dipende della pulsazione ma dall'ampiezza di X perché il blocco lineare è algebrico.

Devo capire se è possibile un'oscillazione autosostenuta.

$$x(t) = X \sin \omega t \implies y(t) \simeq X |F(X)| \sin(\omega t + \arg F(X))$$

Per il teorema di analisi armonica, l'uscita del blocco lineare $-G(s)$ sarà sempre un'armonica con stessa pulsazione, modulo moltiplicato per il modulo di $G(j\omega)$ (funzione di risposta armonica) e fase aumentata della fase di $G(j\omega)$:

$$y(t) \simeq -X |F(X)| |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg F(X) + \arg G(j\omega))$$

Se deve esserci un'oscillazione autosostenuta devono coincidere le due armoniche

$$X \sin \omega t = -X |F(X)| |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg F(X) + \arg G(j\omega))$$

$$\begin{cases} |F(x)|\,|G(j\omega)| = 1 \\ \arg F(x) + \arg G(j\omega) = \pi \mod 2\pi \end{cases}$$

Il sistema equivale all'EQUAZIONE DI CICLO LIMITE $\boxed{F(X)\,G(j\omega) = -1}$

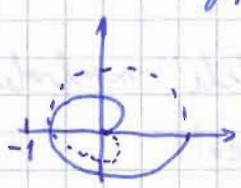
Il diagramma polare della funzione $-\frac{1}{F(X)}$ è detto LUOGO DEI PUNTI CRITICI.

I due diagrammi polari si intersecano in due punti: A e B che sono possibili cicli limite. Un ciclo limite può essere:

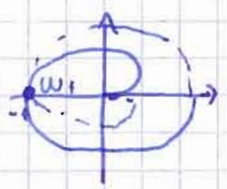
- stabile  - instabile 

Un modo per analizzare il ciclo limite è un'estensione euristica del criterio di Nyquist:

Il criterio di Nyquist per un sistema retroazionato diceva che un sistema è stabile se il diagramma di Nyquist polare completo non tocca o circonda -1:



Se così non fosse, avrei



$L(j\omega_1) = -1$

$1 + L(j\omega_1) = 0$ equazione sistema retroazionato

$\Rightarrow$ i poli sono immaginari

In ambito non lineare $-\frac{1}{F(X)}$ è il luogo dei possibili punti critici (tipo -1).

Pertanto, se X_1 diventa $X_1 + \Delta X_1$, il punto critico si porta all'interno del diagramma polare completo e quindi è destabilizzante (se $\Delta X > 0$) oppure si porta all'esterno ($\Delta X < 0$) ma si allontana dal punto A.

$\Rightarrow$ A INSTABILE

Viceversa, $X_2 \to X_2 + \Delta X_2$, se $\Delta X_2 > 0$ il punto critico si porta all'esterno e quindi è stabilizzante, se $\Delta X_2 < 0$ il punto critico si porta all'interno (destabilizzante), ma in virtù della direzione di crescita di X si riporta al punto critico B.

$\Rightarrow$ B è STABILE.

ESERCITAZIONE 5

① $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1^3 + x_3 \\ \dot{x}_3 = u \qquad \text{con } u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3 \end{cases}$$

Il sistema linearizzato ha matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$

Se calcolo gli autovalori di A con u=0, ottengo:

> eig(A)

$\Rightarrow \sigma(A) = \{1, -1, 0\} \Rightarrow$ origine instabile

Definisco le variabili simboliche k_1, k_2, k_3 con

> syms k1 k2 k3 real

> syms s

Calcolo il determinante di $sI - A$ con

> det (s * eye(3) - A)

Trovo il polinomio caratteristico:

$k_1 - k_3 - s + k2 s + k3 s^2 + s^3 = 0$ cioè $s^3 + s^2 k_3 + s(k_2 - 1) + k_1 - k_3 = 0$

Applico il criterio di Rough

3	1	$k_2 - 1$	0
2	k_3	$k_1 - k_3$	0
1	$k_3(k_2-1) - k_1 + k_3$	0	0
0	$k_1 - k_3$		

Devo avere tutte permanenze:

$$\begin{cases} k_3 > 0 \\ k_3(k_2 - 1) - k_1 + k_3 > 0 \\ k_1 - k_3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_3 > 0 \\ K_2 K_3 > K_1 \\ K_1 > K_3 \end{cases}$$

ovvero $K_1, K_2, K_3 > 0$.

Con questo approccio non riesco a garantire la stabilità globale. Uso quindi il metodo di integrator backstepping, che parte dallo Jacobiano e ricorsivamente arriva alla soluzione.

\> jacobian (f, v) restituisce lo Jacobiano della funzione f rispetto al vettore v.

Definisco $\phi_0(x_1) = -k_0 x_1$ dopo aver definito le variabili simboliche reali k_0, x_1, x_2, x_3.

Definisco la funzione di Lyapunov $V_0(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2$

```
> phi0 = -k0 * x1
> V0 = 0.5 * x1^2
```

Il secondo passo è scrivere ϕ_1 e V_1:

$$\phi_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_1^3 + \frac{\partial \phi_0}{\partial x_1}(x_2) - \frac{\partial V_0}{\partial x_1}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coefficiente} \\ \text{di } x_2}}{(1)} - k_1(x_2 - \phi_0(x_1))$$

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{2}\left(x_2 - \phi_0(x_1)\right)^2$$

Il terzo passo è:

$$\phi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1 \partial x_2}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_1^3 + x_3 \end{bmatrix} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1 \partial x_2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - k_2(x_3 - \phi_1)$$

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}(x_3 - \phi_1)^2$$

Per simulare la stabilizzazione, definisco una funzione .m con il sistema in cui al posto di x_3 metto ϕ_2 calcolata.

```
function dx = es(t,x)
dx = zeros(3,1);
dx(1) = x(2);
dx(2) = x(1) + x(1)^3 + x(3);
dx(3) = -x(2) - x(1) - 2*x(1) + x(3) + x(2) + x(1)^3 + x(2) + x(1) - x(2)*(3*x(1)^2 + 1 + 2) +
      - 2*(x(1)^3 + x(1) + x(3));
end
```

poi calcolo con:

```
> ode45(@es, [0,10], [1;1;1])
```

e plotto

```
> plot3(x(:,1), x(:,2), x(:,3))
```

② Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2(t) - 10x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 \end{cases} \quad \text{per } t>0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - 10x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1 \end{cases}$$

L'introduzione del gradino modifica il punto di equilibrio.

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$ se il punto di equilibrio è stabile e la regione di attrazione è sufficientemente ampia da contenere il punto dello stato corrente.

Per trovare il punto di equilibrio pongo $\dot{x}_1 = 0$

$$\begin{cases} x_{1eq} = 0.395 \\ x_{2eq} = 0.1 \end{cases}$$

Applico il cambio di coordinate

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 0.395 \\ z_2 = x_2 - 0.1 \end{cases}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -10 z_2 \\ \dot{z}_2 = z_1 - 3.9 z_2 - \frac{1}{2} z_2^2 \end{cases}$$

Il sistema linearizzato è dato dalla matrice $\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -3,9 \end{bmatrix} \to$ stabile.
Lo stato iniziale ($x_1=0$ $x_2=0$) nelle nuove coordinate è dato da $\begin{bmatrix} -0.395 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

Scelgo $V(z) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2$ e calcolo $\dot{V}(z)$, che però non risulta essere definita negativa in un intorno dell'origine (non è rispettato il criterio di Sylvester). Devo quindi risolvere l'equazione di Lyapunov:

$PA + A^T P = -I$ con $Q = I$

con Matlab:

```
> P = lyap(A', eye(2))
```

Definisco quindi $V(z) = z^T P z$ e calcolo $\dot{V}(z) = -z_1^2 - z_2^2 - 0.5 z_1 z_2^2 + 1.4103 z_2^3$
La stima della regione di attrazione è:

$$\dot{V}(z) \leq -\|z\|^2 + 0.5 \underbrace{|z_1 z_2|}_{\leq \frac{1}{2}\|z\|^2} \underbrace{|z_2|}_{\leq \|z\|} + 1.4103 |z_2|^3 \leq -\|z\|^2 + 0.25 \|z\|^3 + 1.4103 \|z\|^3$$

$$\dot{V}(z) \leq -\|z\|^2 (1 - 1.6603 \|z\|)$$

Quindi $\dot{V}(z)$ è definita negativa per $\|z\| < \frac{1}{1.6603} = 0.6023$

$$\{z \in \mathbb{R}^2 : z^T P z \leq \underbrace{\lambda_{min}(P)}_{eig(P) = 0.1393} \cdot \underbrace{r^2}_{0.6023}\} \subset R_A$$

$$\{z \in \mathbb{R}^2 : z^T P z \leq 0.0505\} \subseteq R_A$$

La prova di convergenza è prendere lo stato iniziale nelle coordinate z e verificare che soddisfa la relazione.

$$\begin{bmatrix} -0.395 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3360 & -0.5 \\ -0.5 & 1.4103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.395 \\ -0.1 \end{bmatrix} \leq 0.0505$$

$$0.0270 \leq 0.0505 \quad \text{OK!} \quad \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$$

ESERCITAZIONE 6

①

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

(a) Dimostro che l'origine è stabile calcolando lo Jacobiano nel punto di equilibrio

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\cos x_1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$P(s) = (s+1)(s+2) - 1 = s^2 + 3s + 1$ stabile

(b) Scelgo $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ e calcolo $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-\sin x_1 + x_2) + x_2(x_1 - 2x_2) = -x_1 \sin x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

Devo trovare un intorno in cui $\dot{V}(x) < 0$. Se l'intorno è infinitesimo (x_1 e x_2 molto piccoli), $\sin x_1 \simeq x_1$ (vale solo per infinitesimi), come dice lo sviluppo di Mac-Laurin.

$$\dot{V}(x) \simeq -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Applico il criterio di Sylvester:

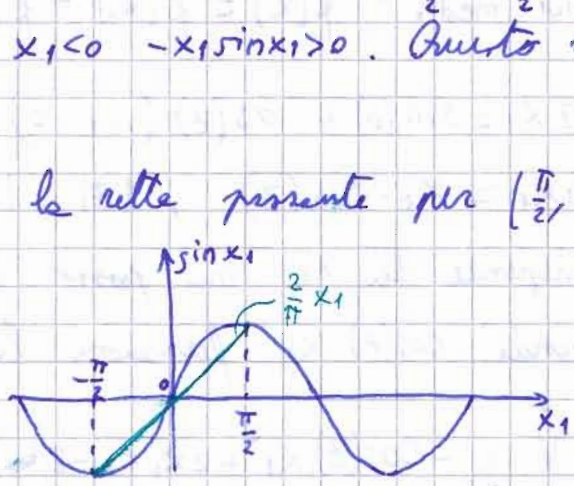
$-1 < 0$ OK

$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$ OK

La forma quadratica infinitesima è definita negativa in un intorno.

Il termine $-x_1 \sin x_1$ si comporta in modo corretto tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, in cui se $x_1 > 0$, $-x_1 \sin x_1 < 0$ e se $x_1 < 0$ $-x_1 \sin x_1 > 0$. Questo non avviene fuori da questo intervallo.

Potrei sostituire la funzione $\sin x_1$ con la retta passante per $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ nell'intervallo $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Se $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x_1 \geq \frac{2}{\pi} x_1$

$$x_1 \sin x_1 \geq \frac{2}{\pi} x_1^2$$

$$-x_1 \sin x_1 \leq -\frac{2}{\pi} x_1^2$$

$x_1 \leq 0$ per cui cambia il verso della disuguaglianza

Se $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ $\frac{2}{\pi} x_1 \geq \sin x_1$ $x_1 \sin x_1 \geq \frac{2}{\pi} x_1^2$ $-x_1 \sin x_1 \leq -\frac{2}{\pi} x_1^2$ come sopra

Quindi nell'intervallo $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la $\dot{V}$ è limitata da:

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{\pi} x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

Questa forma quadratica è già facile da analizzare

$$-\frac{2}{\pi} x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$-\frac{2}{\pi} < 0$ OK

$\det \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{4}{\pi} - 1 > 1$ OK

Ho dimostrato che nella fascia

$\dot{V} \leq 0$. Per cui devo allargare i cerchi fino ad andare a toccare il bordo, quindi $B_{\frac{\pi}{2}} \subseteq R_A$ e $\|x\| \leq 1{,}57 = \frac{\pi}{2}$

Potrei migliorare la stima allargando un po' la striscia, stando lontano da π.

Un altro metodo è cercare di descrivere la funzione $\sin x_1$ con una funzione lineare usando il teorema del valor medio.

Teorema del valore medio: $f(x) = f(x_0) + f'(z)(x - x_0) \quad , \quad z \in L(x_0, x)$ segmento che congiunge x_0 con x

$\sin x_1 = \sin(0) + \cos(z)(x_1 - 0) \quad , \quad z \in L(0, x_1)$

$\sin x_1 = x_1 \cdot \cos(z) \quad , \quad |z| < |x_1|$

z dipende da x_1, ma posso considerare $\cos(z)$ come parametro e quindi $\cos(z) \cdot x_1$ funzione lineare.

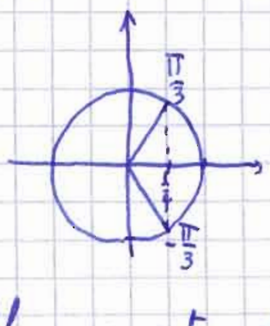
$\dot{V} = -\cos(z) x_1^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2$ diventa una forma quadratica

relazione esatta! non dominanza...

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(z) & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$ e applico il criterio di Sylvester

$$\begin{cases} -\cos(z) < 0 \\ 2\cos(z) - 1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(z) > 0 \\ \cos(z) > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos(z) > \frac{1}{2}$$

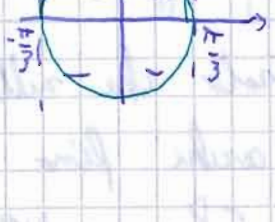
$\dot{V}$ è definita negativa (su tutto $\mathbb{R}^2$) se $\cos(z) > \frac{1}{2}$. Ma z è una funzione di x_1:



$\cos(z) > \frac{1}{2} \iff |z| < \frac{\pi}{3}$ ma $|z| < |x_1|$

Cioè, se $|x_1| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |z| < \frac{\pi}{3}$

Ho scoperto che se $|x_1| \leq \frac{\pi}{3}$, nella striscia



$\dot{V} < 0$

Ottengo quindi una stima diversa:

$B_{\frac{\pi}{3}} \subseteq R_A \qquad \|x\| \leq 1,04$

La stima risulta peggiore, anche se più precisa, ma non è sempre così.

METODO ANALITICO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \dot{V}(x) = -x_1 \sin x_1 + 2x_1x_2 - 2x_2$$

Devo massimizzare r tale che $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in \bar{B}_r$. Posso riscrivere il problema come:

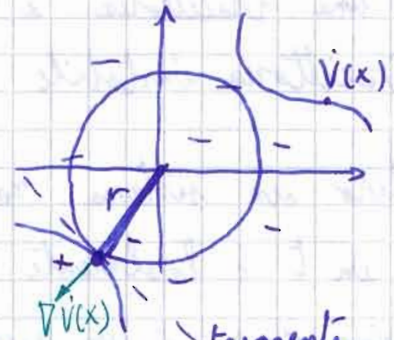
$$\min r$$

vincoli
$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$
$$\dot{V}(x) = 0$$

Per risolvere questo problema di ottimizzazione posso usare

1) metodo dei moltiplicatori di Lagrange
2) metodo geometrico

Usiamo il metodo geometrico.



$$\nabla \dot{V} = \left[\frac{\partial \dot{V}}{\partial x}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

il gradiente è sempre $\perp$ alla tangente perché indica la direzione di massima crescita

Un vettore perpendicolare a $\nabla\dot{V}$ è:

$$\operatorname{im} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \text{retta tangente}$$

Il problema diventa:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r^2 \\ \dot{V}(x) = 0 \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow x_1 \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

condizione di tangenza

Queste sono condizioni necessarie ma non sufficienti.

Per risolvere questo sistema posso usare Matlab
$>$Fsolve (funzione, x_0)

Se trasformo la prima equazione in coordinate polari $x_1 = r\cos\theta$ e $x_2 = r\sin\theta$ ottengo $r^2 = r^2$ e la posso eliminare, ottenendo un sistema di due equazioni in due incognite.

LEZIONE 12

I sistemi non autonomi sono caratterizzati dal fatto che il campo vettoriale dipende dal tempo.
In alcune situazioni può essere necessario studiare la stabilità lungo una traiettoria e non di un punto di equilibrio.
Una traiettoria instabile tuttavia consente una maggiore manovrabilità.

Considero un sistema non autonomo $\Sigma: \dot{x} = f(t,x)$ con f continua a tratti in t e localmente lipschitziana.
L'origine $x=0$ è un punto di equilibrio di Σ in $t=0$ se $f(t,0)=0 \ \forall t \geq 0$

Un punto di equilibrio nell'origine è, in generale, la traslazione di un moto non nullo di un sistema.

Se considero un sistema lineare $\dot{x} = -x + u(t)$ e trovo una soluzione $x(t)$ essa è sempre stabile $\forall u(t)$.
Nei sistemi lineari, invece, questo non è più vero. Se considero $\dot{x} = -x + x^2 + u(t)$, $x(t)$ è stabile solo se molto piccolo, altrimenti domina x^2 e diverge (instabile).

Per i sistemi non autonomi l'origine $x=0$ in $t=0$ è stabile se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall t_0 \geq 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tale che
$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

Quindi, nei sistemi autonomi, la stabilità dipende anche da t_0.

Inoltre, il punto di equilibrio $x=0$ è

- stabile uniformemente se δ dipende solo da ε e non da t_0
- instabile se non è stabile
- asintoticamente stabile se oltre ad essere stabile $\exists c = c(t_0) > 0$ tale che
$$\|x(t_0)\| < c \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$
- uniformemente asintoticamente stabile se è uniformemente stabile ed esiste $c>0$ tale che c non dipende da t_0
- globalmente uniformemente asintoticamente stabile se è uniformemente stabile e $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall c > 0$ $\exists T = T(\varepsilon, c)$ tale che $\|x(t_0)\| < c \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c)$

La regione di attrazione R_A è definita come:

$$R_A = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t\to\infty} \underbrace{x(t; t_0, x_0)}_{\text{soluzione equazione di stato}} = x_{eq} \quad \forall t_0 \geq 0\}$$

Si consideri una funzione continua $\alpha : [0, a[\to [0, \infty[$; appartiene alla classe K se

1. $\alpha(0) = 0$
2. è strettamente crescente.

È detta appartenente alla classe K_∞ se $a = \infty$, $\alpha(\cdot) \in K$ e $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \infty$.

Una funzione $\beta : [0, a[\times [0, \infty[\to [0, \infty[$ è di classe KL se

1. $\forall s$ fissato, $\beta(\cdot, s) \in K$
2. $\forall r$ fissato, $\beta(r, s)$ è decrescente rispetto a s e $\lim_{s\to\infty} \beta(r, s) = 0$

Posso rivedere le definizioni di stabilità:

$x=0$ uniformemente stabile $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha(\cdot) \in K$ e $\exists c > 0$ indipendente da t_0 tali che
$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \ \forall \|x(t_0)\| < c.$$

$x=0$ uniformemente asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \exists \beta(\cdot,\cdot) \in KL$ e $\exists c>0$ indipendente da t_0 tali che $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \ \forall \|x(t_0)\| < c$.

$x=0$ globalmente uniformemente asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \exists \beta(\cdot,\cdot) \in KL$ tale che $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t-t_0) \ \forall t \geq t_0 \geq 0, \ \forall x(t_0)$

Se $\beta(r,s) = K r e^{-\gamma s}$ si parla di stabilità esponenziale.

$x=0$ esponenzialmente stabile $\Leftrightarrow \exists c>0, K>0, \gamma>0$ indipendenti da t_0 tali che $\|x(t)\| \leq K \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \ \forall \|x(t_0)\| < c$.

$x=0$ globalmente esponenzialmente stabile $\Leftrightarrow \exists K>0, \gamma>0$ indipendenti da t_0 tali che $\|x(t)\| \leq K\|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \ \forall x(t_0)$

Più grande è γ e tanto più veloce è la convergenza a 0.

Teorema di Lyapunov (metodo diretto per sistemi non autonomi)

Sia $V: [0,\infty[\times D \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale che

1. $W_1(x) \leq V(t,x) \leq W_2(x)$ $\quad$ V dominata da due funzioni indipendenti dal tempo.
2. $\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -W_3(x)$ $\quad$ $\dot{V}$ dominata da una funzione $-W_3$ negativa, quindi $\dot{V} \leq 0$

$\forall t \geq 0$ e $\forall x \in D$ con $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$ funzioni continue e definite positive su D

Allora $x=0$ è uniformemente asintoticamente stabile.

L'origine è uniformemente asintoticamente stabile se esiste una funzione $V(t,x)$ differenziabile definita positiva decrescente e la cui derivata lungo i moti del sistema è definita negativa.

Corollario

L'origine è globalmente uniformemente asintoticamente stabile se esiste una funzione $V(t,x)$ differenziabile

1. definita positiva e radialmente illimitata
2. decrescente
3. con $\dot{V}(t,x)$ definita negativa

I sistemi stabili lineari sono anche esponenzialmente stabili.

ESERCITAZIONE 7

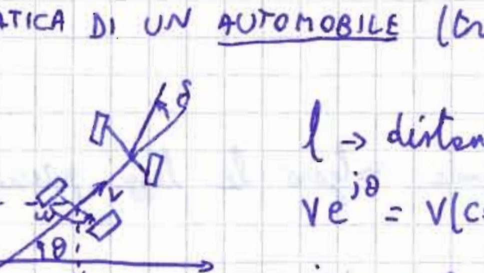
Supponiamo che non ci sia strisciamento delle ruote e che il corpo sia rigido.

CINEMATICA DI UN AUTOMOBILE (trazione posteriore)

l → distanza fra l'asse posteriore e anteriore delle ruote

$ve^{j\theta} = v(\cos\theta + j\sin\theta)$ perché orientato lungo l'asse

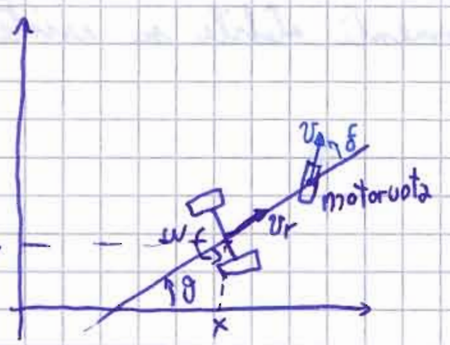
$\dot{x} = v\cos\theta$
$\dot{y} = v\sin\theta$
} slittamento senza strisciamento



$$\omega = \frac{\text{velocità tangenziale}}{\text{distanza}} = \frac{v\tan\theta}{l} = \dot{\theta}$$

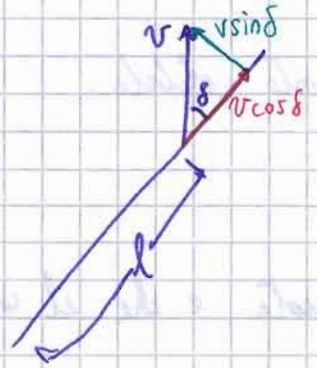
$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{1}{l} v\tan\delta \end{cases}$$

CINEMATICA DI UNA NAVETTA AUTOMATICA



l = distanza fra asse posteriore e motoruota

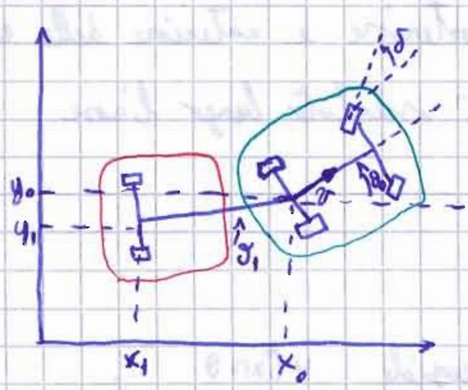
$$v\cos\delta \underbrace{e^{j\theta}}_{\text{proietto lungo } \theta} = v\cos\delta(\cos\theta + j\sin\theta)$$



$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\delta\cos\theta \\ \dot{y} = v\cos\delta\sin\theta \\ \omega = \dfrac{v\sin\delta}{l} = \dot{\theta} \end{cases}$$

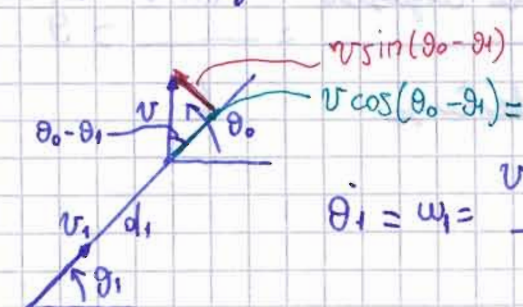
$\delta \rightarrow$ angolo di sterzatura

CINEMATICA DI UN VEICOLO CON RIMORCHIO



Per il fuoristrada valgono le leggi precedenti

$$\dot{x}_0 = v\cos\theta_0$$
$$\dot{y}_0 = v\sin\theta_0$$
$$\dot{\theta}_0 = \frac{v}{d_0}\tan\delta$$

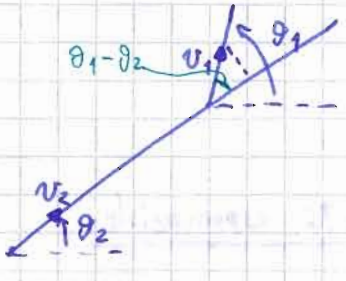


$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 = \frac{v\sin(\theta_0-\theta_1)}{d_1}$$

L'ipotesi fatta è che il gancio è sempre sull'asse del veicolo che sta davanti.

CINEMATICA DI VEICOLO CON N RIMORCHI

In questa generalizzazione si può ragionare ricorsivamente.



$$v_2 = v_1 \cos(\vartheta_1-\vartheta_2)$$

$$\dot\vartheta_2 = \omega_2 = \frac{v_1 \sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{d_2} = \frac{v\cos(\vartheta_0-\vartheta_1)\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)}{d_2}$$

e così via.

Tutti questi modelli godono della proprietà DIFFERENTIALLY FLATNESS che semplifica la loro trattazione.

Considero il sistema $\Sigma: \dot x = f(x,u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Σ è detto DIFFERENTIALLY FLAT se esiste un'uscita $y_f \in \mathbb{R}^m$ definita come

$$y_f = y_f(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(s)}) \quad \text{"uscita flat"}$$

per la quale l'ingresso e lo stato di Σ sono determinabili come

$$x = \varphi_0(y_f, y_f^{(1)}, \dots, y_f^{(r)})$$
$$u = \varphi_1(y_f, y_f^{(1)}, \dots, y_f^{(r+1)})$$

Se un sistema è differentially flat, l'inversione dinamica tra l'uscita flat e l'ingresso è molto semplice perché è determinabile attraverso la conoscenza di φ_1.

L'uscita flat non è detto che sia reale o di interesse controllistico. Quando l'uscita flat coincide con l'uscita di interesse, il sistema è più semplice.

Nel caso dell'automobile, l'uscita flat coinciderve con x e y.
Da $\dot x = v\cos\vartheta$ e $\dot y = v\sin\vartheta$ riesco a ricavare univocamente v e ϑ.
Calcolando poi la derivata di ϑ, dalla terza equazione ricavo δ.

Nel veicolo con N rimorchi l'uscita flat è l'ultimo rimorchio, quindi conviene programmare la traiettoria su quell'ultimo rimorchio. Conoscendo la posizione dell'ultimo carrello posso determinare v e δ del veicolo trainante.

LEZIONE 13

Teorema del metodo diretto di Lyapunov per la stabilità esponenziale

Sia $x=0$ un punto di equilibrio per il sistema $\dot{x}=f(t,x)$ e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio contenente l'origine. Sia $V:[0,\infty)\times D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 ed esistano costanti positive k_1, k_2, k_3 e c per le quali

$$k_1 \|x\|^c \leq V(t,x) \leq k_2 \|x\|^c$$

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq -k_3 \|x\|^c$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall x \in D$.

Allora $x=0$ è esponenzialmente stabile. In particolare se $D=\mathbb{R}^n$ allora l'origine è globalmente esponenzialmente stabile.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

con $g(t)$ differenziabile e $0 \leq g(t) \leq k$ $\quad \dot{g}(t) \leq g(t) \quad \forall t \geq 0$

Il sistema ha un certo grado di incertezza.

Considero $V(t,x) = x_1^2 + [1+g(t)]x_2^2$ e si ha

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t,x) \leq x_1^2 + [1+k]x_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

da cui segue che $V(t,x)>0$ radialmente illimitata e decrescente.

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(t,x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2+2g(t)-\dot{g}(t)]x_2^2$$

$$\dot{V}(t,x) \le -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = -\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{Q} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \sigma(Q) = \{1, 3\}$$

Applico il criterio di Sylvester su Q

$2 > 0$ ✓

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ ✓

Q è definita positiva $\Rightarrow \dot{V}(t,x)$ è definita negativa

L'origine è pertanto globalmente, uniformemente asintoticamente stabile.

$$\|x\|^2 \le V(t,x) \le x_1^2 + (1+k)x_2^2 \le (1+k)\|x\|^2$$

$$\dot{V}(t,x) \le -x^T Q x \le -\underbrace{\lambda_{min}(Q)}_{1} \cdot \|x\|^2 = -\|x\|^2$$

L'origine è globalmente esponenzialmente stabile.

$$\|x(t)\| \le \sqrt{k+1}\,\|x(t_0)\| \exp\left\{ -\underbrace{\frac{1}{(1+k)^2}}_{\gamma}(t-t_0) \right\}$$

SISTEMI LINEARI NON STAZIONARI E LINEARIZZAZIONE

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$$

La soluzione è esprimibile con la matrice di transizione $\phi(t,t_0)$

$$x(t) = \phi(t,t_0)\,x(t_0)$$

<u>Lemma</u>

Il punto di equilibrio $x=0$ di $\dot{x} = A(t)x$ è globalmente uniformemente asintoticamente stabile se e solo se esistono costanti positive k e γ per le quali

$$\|\phi(t,t_0)\| \le k \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \quad \forall t \ge t_0 \ge 0$$

ovvero se e solo se è globalmente esponenzialmente stabile.

La stabilità esponenziale dell'origine non è caratterizzata dalla dislocazione degli autovalori di $A(t)$ nel semipiano complesso negativo.

Teorema di linearizzazione

Sia $x=0$ un punto di equilibrio per $\dot{x}=f(t,x)$ dove $f:[0,\infty]\times D\to\mathbb{R}^n$ è differenziabile, $D=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_2<r\}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ è limitato e lipschitziano su D uniformemente in t. Si definisce

$$A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\Big|_{x=0}$$

Se l'origine è esponenzialmente stabile per il sistema linearizzato

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)$$

allora $x=0$ è esponenzialmente stabile per il sistema non lineare.

Teoremi inversi

Consentono, a partire da una certa stabilità, di determinare l'esistenza di una particolare funzione di Lyapunov. Non consentono però di determinare tale funzione.

ESERCITAZIONE 8

① $\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+g(t)\,x_2\\ \dot{x}_2=g(t)\,x_1-2x_2\end{cases}$ $\quad |g(t)|\le 1 \quad \forall t\ge 0$

Il sistema è già lineare. Devo trovare una funzione di Lyapunov che mi permetta di studiarne la stabilità.

$$V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2=\frac{1}{2}\|x\|^2$$

$$\dot{V}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=x_1\left(-2x_1+g(t)x_2\right)+x_2\left(g(t)x_1-2x_2\right)=-2x_1^2+2g(t)x_1x_2-2x_2^2$$

È una forma quadratica tempo variante.

Dalla forma di $V(x)$ vedo che posso provare anche la stabilità esponenziale $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ e $c = 2$.

Per trovare k_3 cerco di esprimere $\dot{V}$ come forma quadratica.

$$\dot{V} \leq -2\|x\|^2 + 2|g(t)|\,|x_1 x_2| \leq -2\|x\|^2 + 2|x_1 x_2| \leq -2\|x\|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\|x\| = -\|x\|^2$$

Ricordando il teorema:

$$k_1 \|x\|^c \leq V(t,x) \leq k_2 \|x\|^c \quad \text{e} \quad \dot{V}(t,x) \leq -k_3 \|x\|^c$$

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/c} \|x(t_0)\| \exp\left\{-\frac{k_3}{k_2 c}(t-t_0)\right\}$$

Quindi, nel nostro caso $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ $\quad c = 2 \quad k_3 = 1$

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp\{-(t-t_0)\} \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall x(t_0) \in R$$

② $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1 + b\cos t)\, x_2 \end{cases}$

Trovare $b^* > 0$ tale che $x = 0$ è esponenzialmente stabile $\forall b$ tale che $|b| < b^*$

Per $b = 0$, il sistema diventa lineare con matrice associata

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x \quad \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix} = s(s+1) + 1 = \underbrace{s^2 + s}_{P} \underbrace{+1}_{P} \quad \text{è stabile.}$$

Scelgo $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2$ e calcolo $\dot{V}$

$$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(x_2) + x_2(-x_1 - (1+b\cos t)x_2) = \cancel{x_1 x_2} - \cancel{x_1 x_2} - (1 + b\cos t)x_2^2 =$$
$$= -(1 + b\cos t)\, x_2^2$$

È una funzione semidefinita negativa (manca il termine x_1) e non può quindi essere ricondotta a $\dot{V} \leq -k_3 \|x\|^c$.

Devo cambiare la funzione $V(x)$. Considero il termine $b\cos t$ come termine perturbativo.

Siccome il sistema autonomo $(b=0)$ è stabile, uso l'equazione di Lyapunov per trovare una funzione V corretta.

$$PA + A^T P = -Q \qquad \text{scelgo } Q = I$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$. Posso ora costruire $V(x) = x^T P x$ e calcolare $\dot V(x)$

$$\dot V(x) = \dot x^T P x + x^T P \dot x = 2x^T P \dot x = 2\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - (1+b\cos t)x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -x_1^2 - b\cos t\, x_1 x_2 - (1+2b\cos t)\, x_2^2 =$$

$$= -\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{2}\cos t \\ \frac{b}{2}\cos t & 1+2b\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Impongo ora che la matrice sia definita positiva. Non mi interessa calcolare gli autovalori perché non voglio una particolare velocità di convergenza (e quindi non devo costruire una stima determinando K_3). È sufficiente applicare il criterio di Sylvester:

$1 > 0$ ok!

$1 + 2b\cos t - \frac{b^2}{4}\cos^2 t > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall b$ tale che $|b| < b^*$

Per ricondurmi a una disequazione ≥ 0 per semplicità, chiedo che il determinante sia $\geq$ di un certo valore ε piccolo, ad esempio $\varepsilon = 0{,}01$

$$1 + 2b\cos t - \frac{b^2}{4}\cos^2 t \geq 0{,}01$$

$$0{,}99 + 2b\cos t - \frac{b^2}{4}\cos^2 t \geq 0$$

$$0{,}99 + 2b\cos t - \frac{b^2}{4}\cos^2 t \geq 0{,}99 - 2|b| - \frac{|b|^2}{4} \geq 0$$

$r = |b| \qquad 0{,}99 - 2r - \frac{r^2}{4} = 0 \qquad r_{1,2} = \begin{cases} 0{,}467 \\ -8{,}467 \end{cases}$

Quindi se $|b| \le 0{,}467$ $\dot{V} < 0$ e pertanto $b^* = 0{,}467$.

(3)
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - g(t)\, x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - g(t)\, x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad g(t) \ge k > 0 \quad \forall t \ge 0$$

Applico il teorema di linearizzazione in quanto sistema non lineare
Calcolo lo Jacobiano:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3g(t)\, x_1^2 - g(t) x_2^2 & 1 - 2g(t)\, x_1 x_2 \\ -1 - 2g(t)\, x_1 x_2 & -g(t)\, x_1^2 - 3g(t)\, x_2^2 \end{bmatrix}$$

Nell'origine lo Jacobiano diventa:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con autovalori } \pm j$$

Gli autovalori sono sull'asse immaginario, pertanto l'origine del sistema non lineare non potrà essere esponenzialmente stabile, in virtù del teorema di linearizzazione, ma può essere globalmente asintoticamente stabile.

Scelgo $V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2$ e calcolo $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 \left(x_2 - g(t)\, x_1 (x_1^2 + x_2^2) \right) + x_2 \left(-x_1 - g(t)\, x_2 (x_1^2 + x_2^2) \right) =$$
$$= \cancel{x_1 x_2} - g(t)\, x_1^4 - g(t)\, x_1^2 x_2^2 - \cancel{x_1 x_2} - g(t)\, x_1^2 x_2^2 - g(t)\, x_2^4 =$$
$$= -g(t)\, x_1^2 \|x\|^2 - g(t)\, x_2^2 \|x\|^2 = -g(t) \|x\|^2 (x_1^2 + x_2^2) = -g(t) \|x\|^4$$

$\dot{V}(x) \le -k \|x\|^4$ e pertanto il sistema è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

④ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + \alpha(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha(t)\, x_1 - x_2^3 \end{cases}$ $\alpha(t)$ continua e limitata

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & -3x_2^2 \end{bmatrix} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(t) \\ -\alpha(t) & 0 \end{bmatrix}$$

L'origine non è esponenzialmente stabile per qualunque valore di $\alpha(t)$, perché se scegliessi ad esempio $\alpha(t) = 0$ lo Jacobiano sarebbe nullo.
Il sistema non lineare non è esponenzialmente stabile.
Essendo presenti i termini mi aspetto stabilità asintotica.

Scelgo $V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ e calcolo $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_1^3 + \alpha(t) x_2) + x_2(-\alpha(t) x_1 - x_2^3) = -x_1^4 - x_2^4 =$$
$$= -(x_1^4 + x_2^4) < 0$$

Ho pertanto dimostrato che l'origine del sistema non lineare è globalmente uniformemente asintoticamente stabile.

ESERCIZI

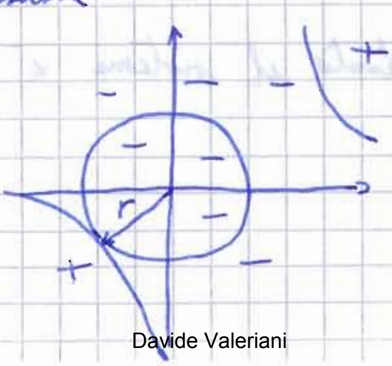
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

La regione di attrazione stimata con $V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ e $\dot{V}(x) = -x_1 \sin x_1 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2$ era stata calcolata con Matlab risolvendo il problema di ottimizzazione

$\min r$

$x_1^2 + x_2^2 = r^2$

$\dot{V}(x) = 0$



Mediante ragionamento geometrico era stata ricavata la terza equazione del sistema non lineare:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r^2 \\ \dot{V}(x) = 0 \\ x_1 \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x_2} - x_2 \dfrac{\partial \dot{V}}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Vediamo ora come arrivare alla stessa soluzione mediante i moltiplicatori di Lagrange.

Il problema di ottimizzazione non vincolato diventa:

$$\min_{\substack{r>0 \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}} \left\{ r + \lambda_1 \left(x_1^2 + x_2^2 - r^2 \right) + \lambda_2 \dot{V}(x) \right\} = \min H$$

Calcolo le derivate parziali rispetto alle 5 variabili e le impongo uguali a 0:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 - 2\lambda_1 r = 0 \\ 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \dfrac{\partial \dot{V}(x)}{\partial x_1} = 0 \\ 2\lambda_2 x_2 + \lambda_2 \dfrac{\partial \dot{V}(x)}{\partial x_2} = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0 \\ \dot{V}(x) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema cercando di eliminare i moltiplicatori di Lagrange ottengo:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2r} \\ \cancel{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}r} x_1 + \lambda_2 \dfrac{\partial \dot V}{\partial x_1} = 0 \\ \cancel{2} \dfrac{1}{\cancel{2}r} x_2 + \lambda_2 \dfrac{\partial \dot V}{\partial x_2} = 0 \\ '' \end{cases}$$

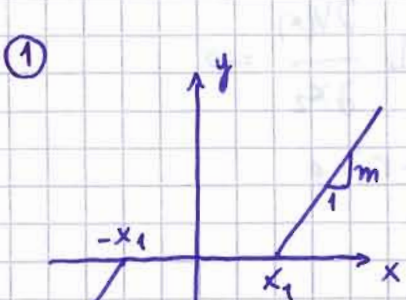
Ipotizzo che $\frac{\partial \dot V}{\partial x_1} \neq 0$ $\left(o\ \frac{\partial \dot V}{\partial x_2} \neq 0 \right)$ perché se fossero entrambe nulle otterrei $x_1 = x_2 = 0$ soluzione ovvia.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2r} \\ \lambda_2 = -\dfrac{x_1}{r \frac{\partial \dot V}{\partial x_1}} \\ \dfrac{1}{r} x_2 - \dfrac{x_1}{r \frac{\partial \dot V}{\partial x_1}} \cdot \dfrac{\partial \dot V}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Longrightarrow -\frac{\partial \dot V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \dot V}{\partial x_2} x_1 = 0$$

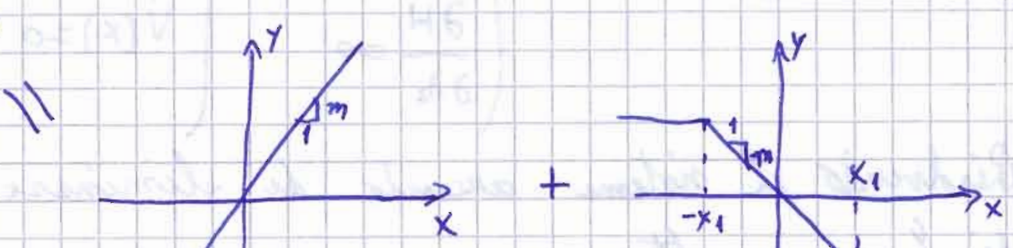
Ho quindi ricavato la stessa equazione individuata con il metodo geometrico.

ESERCITAZIONE 9

①



Tutte le funzioni simmetriche si possono ricondurre alla funzione descrittiva della saturazione.



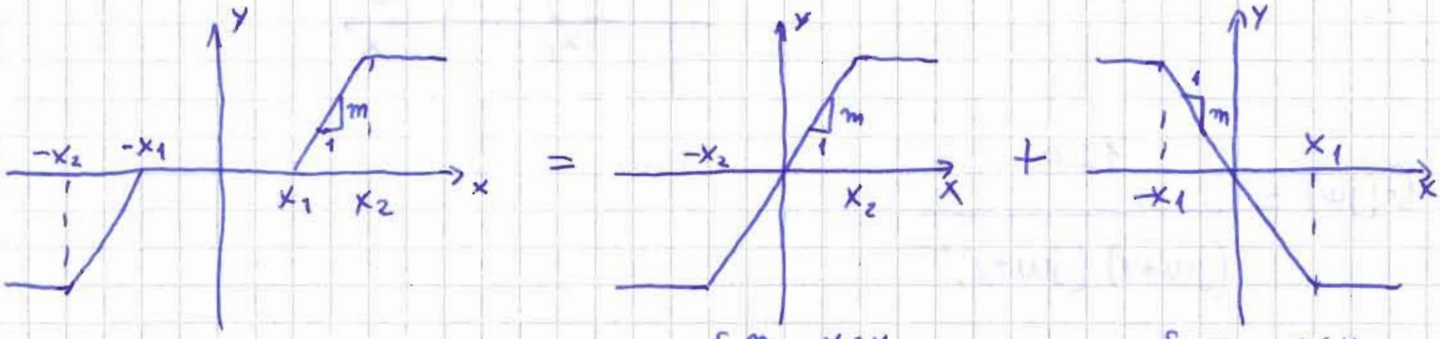
$F_a(x) = m$

$$F_b(x) = \begin{cases} -m & x \leq x_1 \\ -m\, \phi\left(\frac{x}{x_1}\right) & x \geq x_1 \end{cases}$$

Anche la funzione descrittiva della soglia sarà la somma delle funzioni descrittive grazie alla linearità dell'integrale.

$$F(x) = F_a(x) + F_b(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ m\left(1 - \phi\left(\frac{x}{x_1}\right)\right) & x \ge x_1 \end{cases}$$

Se entra una sinusoide nel blocco non lineare con ampiezza inferiore di x_1 non ci sarà nessuna uscita.



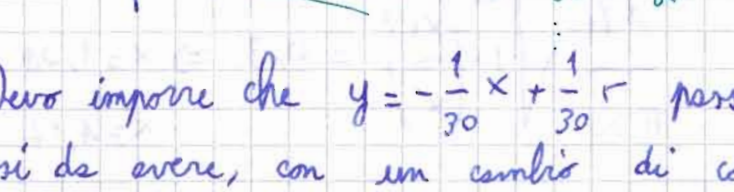
SOGLIA CON SATURAZIONE

$$F_a = \begin{cases} m & x \le x_2 \\ m\,\phi\left(\frac{x}{x_2}\right) & x \ge x_2 \end{cases} \qquad F_b = \begin{cases} -m & x \le x_1 \\ -m\,\phi\left(\frac{x}{x_1}\right) & x \ge x_1 \end{cases}$$

$$F(x) = F_a(x) + F_b(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ m\left(1 - \phi\left(\frac{x}{x_1}\right)\right) & x_1 \le x \le x_2 \\ m\left(\phi\left(\frac{x}{x_2}\right) - \phi\left(\frac{x}{x_1}\right)\right) & x \ge x_2 \end{cases}$$

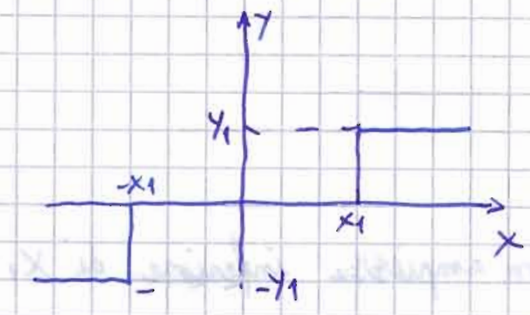
2

$$x = r - c \underset{\substack{\text{in condizioni} \\ \text{di equilibrio}}}{=} r - G(0)\cdot y = r - 30y \rightarrow y = -\frac{1}{30}x + \frac{1}{30}r$$

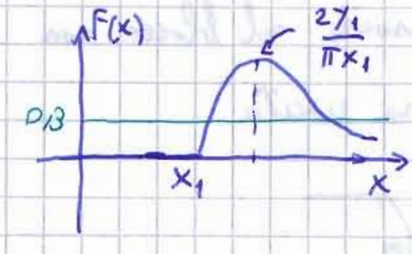


Devo imporre che $y = -\frac{1}{30}x + \frac{1}{30}r$ passi per il punto medio $(2, 1)$, così da avere, con un cambio di coordinate, la caratteristica del relé con soglia

$$1 = -\frac{1}{15} + \frac{1}{30} r \rightarrow r = 32$$

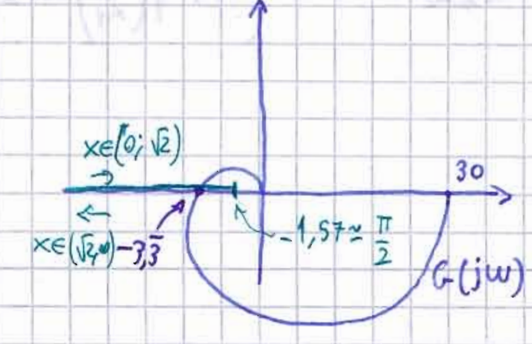


$$F(X) = \begin{cases} 0 & X \leq X_1 \\ \frac{4Y_1}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & X \geq X_1 \end{cases}$$



$$G(j\omega) = \frac{120}{(j\omega+1)(j\omega+2)^2}$$

Il diagramma polare risulta essere:



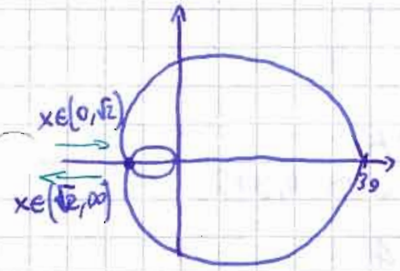
Devo determinare il valore di ω nell'intersezione con l'asse x.
Posso utilizzare il metodo dell'argomento o il criterio di Routh.

$$\omega_c = \sqrt{8} \simeq 2,83 \ \frac{rad}{s}$$

$$\bar{K} = \frac{3}{10} = 0.3 \rightarrow G(\pm j\omega_c) = -\frac{1}{\bar{K}} = -3,\bar{3}.$$

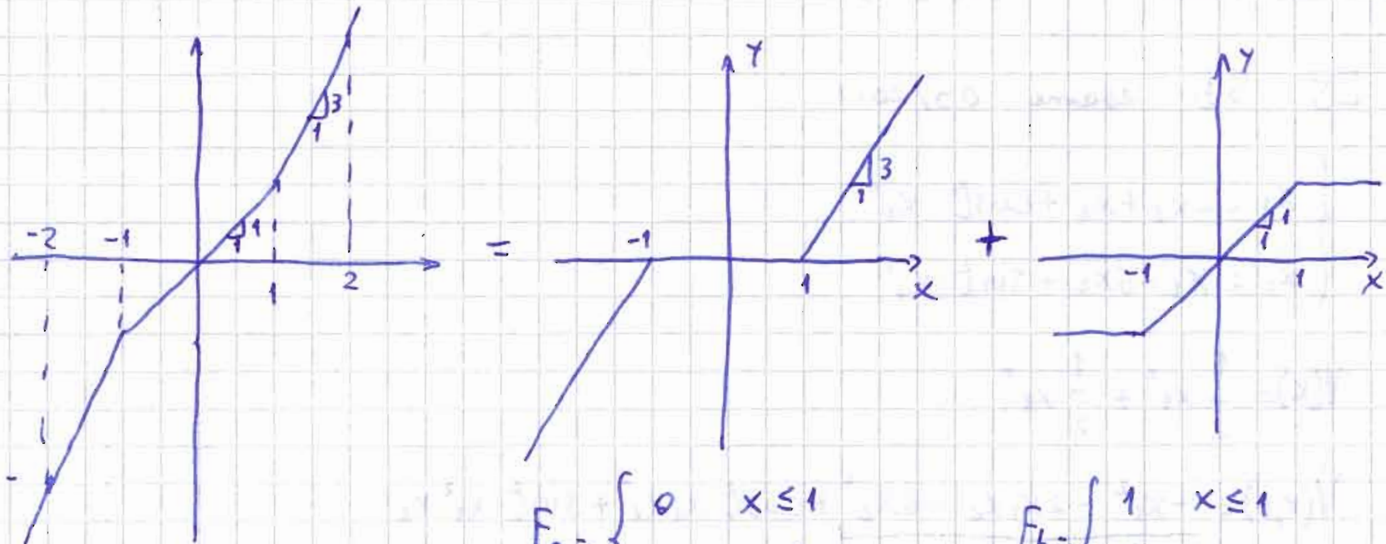
Eguaglio $-\frac{1}{F(X)} = G(\pm j\omega_c)$ e vedo che c'è una soluzione

$$-\frac{1}{F(X)} = -\frac{10}{3} \Rightarrow F(X) = 0,3 \qquad \frac{4Y_1}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} = 0,3 \Rightarrow X = 1,04$$
$$X = 4,12$$



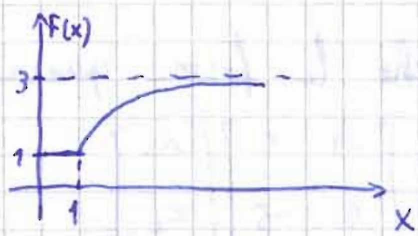
Quando perturbo $x = 1{,}04$, il punto critico entra nel diagramma polare completo e pertanto si avrà instabilità.
Se invece perturbo $x = 1{,}12$, il punto critico esce e avrà stabilità.

③



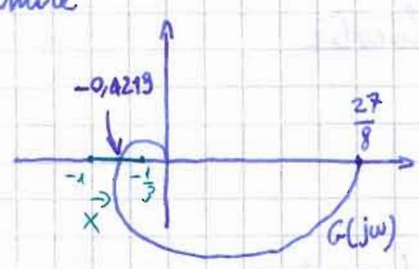
$$F_a = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 3\left(1 - \phi(x)\right) & x \ge 1 \end{cases} \qquad F_b = \begin{cases} 1 & x \le 1 \\ \phi(x) & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F(x) = F_a(x) + F_b(x) = \begin{cases} 1 & x \le 1 \\ 3 - 2\phi(x) & x \ge 1 \end{cases}$$



Studio l'equazione di ciclo limite

$$-\frac{1}{F(x)} = G(j\omega)$$



$$\arg(G(j\omega)) = -3 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2}$$

Risolvo $\arg(G(j\omega_c)) = -\pi \Rightarrow 3 \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{2} = \pi \quad \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \omega_c = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

$$\omega_c = 2 \cdot \sqrt{3} \simeq 3{,}46 \ \frac{rad}{s}$$

$$G(j\omega_c) = -\frac{27}{64} \simeq -0{,}4219$$

$$-\frac{1}{F(x)} = -\frac{27}{64} \rightarrow F(x) = \frac{64}{27} = 3 - 2\phi(x) \rightarrow \phi(x) = \frac{17}{54} \simeq 0{,}315$$

Dal grafico vedo che se $\phi(x) = 0{,}315$, $x \simeq 4$

Pertanto, se x cresce il punto critico si porta all'interno del grafico e si ha instabilità!

Es. 5b esame 09/2011

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \cos t \cdot x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 + \sin t \cdot x_1^2 \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x,t) = \underbrace{-x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2^2}_{\substack{\text{forma quadratica} \\ \text{dominante per } x \text{ piccoli}}} + \cos t \, x_1 x_2^2 + \sin t \, x_1^2 x_2$$

Verifico che la forma quadratica sia definita negativa

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Uso il criterio di Sylvester

$-1 < 0$ ✓

$6 - 1 > 0$ ✓

$$q(x) \leq \lambda_{max}(P) \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \qquad \sigma(P) = \{\underbrace{-0{,}8074}_{\lambda_{max}}, -6{,}1926\}$$

$$\dot{V} \leq -0{,}8074 \|x\|^2 + x_1 x_2 (x_2 \cos t + x_1 \sin t)$$

$$\dot{V} \leq -0{,}8074 \|x\|^2 + |x_1 x_2| \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \right\|}_{\text{norma di matrice}}$$

$$\dot{V} \leq -0{,}8074\,\|x\|^2 + \underbrace{|x_1 x_2|}_{\leq \frac{1}{2}\|x\|^2}\,\|x\| \cdot \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \right\|}_{=1}$$

$$\dot{V} \leq -0{,}8074\,\|x\|^2 + 0{,}5\,\|x\|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \geq 0$$

Devo dimostrare che

$$\dot{V} \leq -0{,}8074\,\|x\|^2 + 0{,}5\,\|x\|^3 \leq -k_3\,\|x\|^2 \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}} \quad \forall t \geq 0$$

$\hookrightarrow \|x\| \leq 0{,}5$

Devo trovare k_3 che verifica la disuguaglianza.

$$-0{,}8074\,\|x\|^2 + 0{,}5\|x\|^3 + k_3\,\|x\|^2 \leq 0$$

$$-(0{,}8074 - k_3)\|x\|^2 + 0{,}5\|x\|^3 \leq 0 \quad \text{divido per } \|x\|^2$$

$$-(0{,}8074 - k_3) + 0{,}5\|x\| \leq 0$$

$$0{.}5\,\|x\| \leq 0{,}8074 - k_3 \iff \|x\| \leq 2(0{,}8074 - k_3) \quad \text{ma } \|x\| \leq 0{,}5$$

Per trovare k_3 impongo $\|x\| = 0{,}5$ e $2(0{,}8074 - k_3) = 0{,}5 \Rightarrow k_3 = 0{,}5574$

Per stimare γ ricordo il metodo indiretto

$$\|x\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/c} \|x(t_0)\| \exp\left\{ -\underbrace{\frac{k_3}{k_2 c}}_{\gamma} (t - t_0) \right\}$$

$c = 2$ e $k_2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = k_3 = 0{,}5574.$